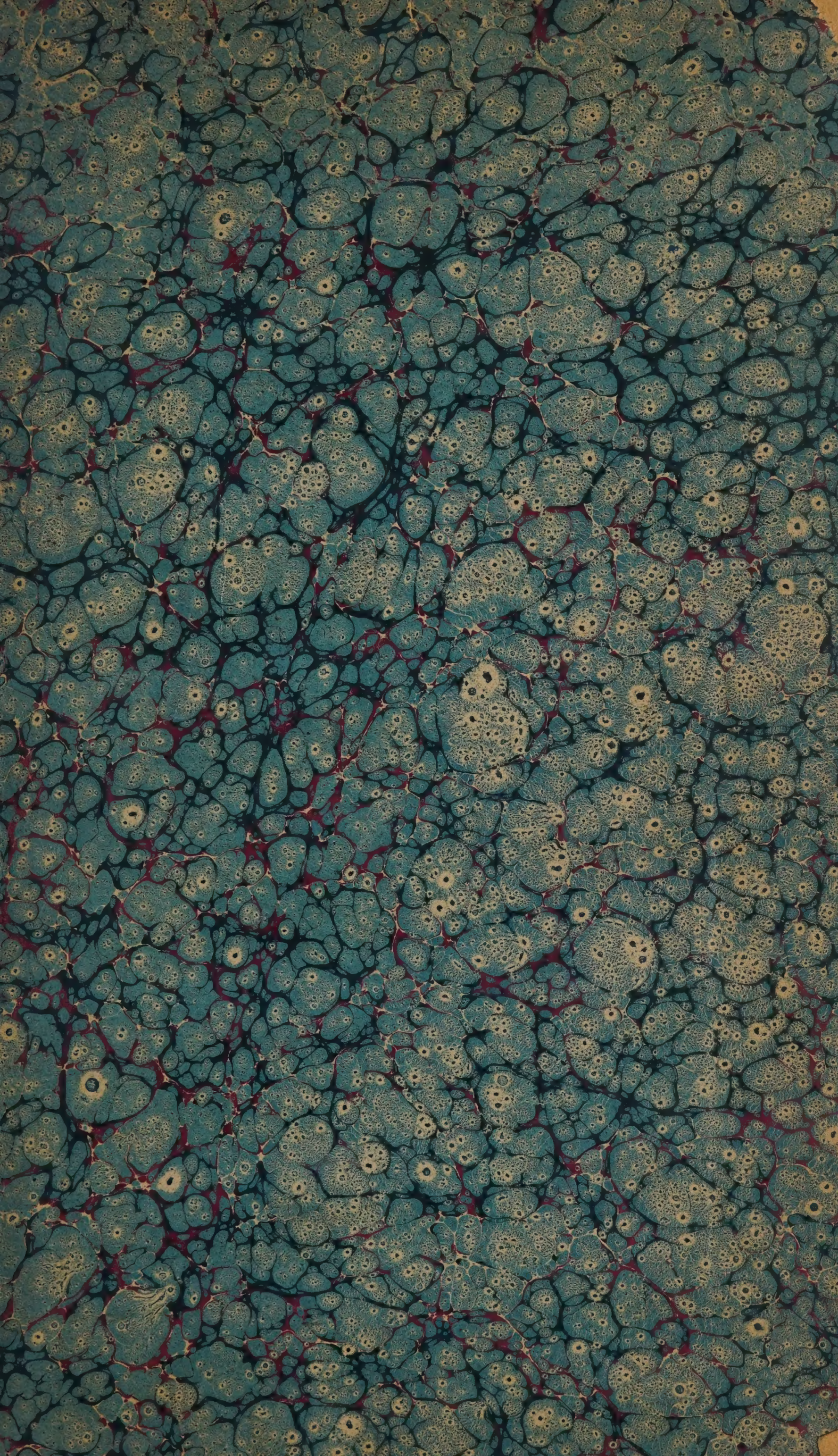




LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL,

RÉDIGÉES

D'APRÈS LES MÉTHODES ET LES OUVRAGES PUBLIÉS OU INÉDITS

DE A.-L. CAUCHY,

François Napoléon Marie

PAR M. L'ABBÉ MOIGNO.

TOME QUATRIÈME. — PREMIER FASCICULE.

CALCUL DES VARIATIONS,

RÉDIGÉ EN COLLABORATION AVEC M. LINDELÖF.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1861.

AVERTISSEMENT.

Après une interruption de dix-sept longues années dont je ne redirai ni les secrets, ni les douleurs, il m'est enfin donné de reprendre la publication de mes *Leçons de Calcul différentiel et intégral,* d'après les méthodes de Cauchy. Le nom de l'illustre mathématicien qui, hélas! n'est plus, avait porté bonheur à mon œuvre; elle s'était écoulée rapidement; en moins de huit années elle était devenue très-rare et très-chère. Le prix excessif de mes deux volumes n'empêchait pas cependant qu'ils fussent très-recherchés; et de tous côtés on me pressait de terminer ces Leçons, de donner une nouvelle édition des volumes épuisés. Ces instances si nombreuses et si vives m'honoraient plus que je ne le méritais, mais elles m'attristaient aussi profondément; ne pas pouvoir y répondre était devenu pour moi un supplice cruel. Mes liens sont enfin brisés, je reprends mon essor, et si la bonne Providence me conserve pendant quelques années encore la santé si excellente qu'elle m'a donnée jusqu'ici, j'aurai bientôt réparé le temps perdu.

La seconde édition de mes Leçons comprendra quatre volumes de 500 à 600 pages chacun :

Tome I. *Calcul différentiel, Calcul direct aux différences finies, Calcul des résidus.*

Tome II. *Intégration des expressions différentielles, Calcul inverse aux différences finies.*

Tome III. *Intégration des équations différentielles et aux différentielles partielles.*

Tome IV. *Calcul des Variations* et *Calcul des fonctions elliptiques.*

Je me suis décidé à commencer par le quatrième volume, par les *Leçons de Calcul des Variations*, et voici mes motifs : 1° le respect et la reconnaissance dus à mes Lecteurs me faisaient un devoir de leur offrir quelque rédaction nouvelle, de leur prouver qu'une trop longue inaction n'avait pas paralysé mes forces; 2° il se présentait une occasion favorable de rédiger le *Calcul des Variations* dans les conditions de succès les plus excellentes, et de doter la France d'un Traité qui lui manquait tout à fait. J'avais près de moi un jeune et savant professeur de l'Université finlandaise de Helsingfors, M. Lindelöf; pour lui le Calcul des Variations est une spécialité, ou mieux une vraie et noble passion, il a grandement perfectionné et simplifié les méthodes de M. Sarrus et de Cauchy. Or, non-seulement M. Lindelöf m'offrait sa collaboration, mais il me demandait instamment la mienne, il voulait absolument que je donnasse un corps et la vie à ses théories nouvelles. Nous nous sommes donc mis à l'œuvre, nous avons travaillé avec

une grande ardeur, et nous avons mené à bonne fin ces *Leçons de Calcul des Variations*. S'il arrive qu'elles nous fassent honneur, cet honneur doit revenir principalement à M. Lindelöf qui est, à proprement parler, l'auteur des méthodes; je demande instamment qu'on lui en reporte la meilleure part.

En même temps, pour regagner plus promptement le terrain perdu, je publie en deux volumes in-8° de 550 a 650 pages des *Leçons de Mécanique analytique* d'après les Méthodes de Cauchy, étendues aux travaux les plus récents des Géomètres; et en un gros volume in-8° des *Leçons de Mécanique philosophique, synthétique et physique*, d'après les idées d'Ampère.

L'ABBÉ F. MOIGNO,
2, rue d'Erfurth.

Paris, ce 4 octobre 1861.

PRÉFACE.

L'origine du Calcul des Variations remonte à l'année 1696, époque à laquelle Jean Bernoulli proposa le fameux problème de la brachistochrone, dont la nouveauté attira vivement l'attention des Géomètres. Jusqu'alors on avait considéré uniquement les maxima et les minima des fonctions de forme entièrement connue; il s'agissait cette fois de déterminer la forme même de la fonction inconnue de manière à faire prendre à une certaine intégrale sa plus petite valeur possible. Les Géomètres contemporains de Bernoulli abordèrent et résolurent ce problème et d'autres du même genre, qui échappaient au Calcul infinitésimal proprement dit, par des artifices particuliers, plus ou moins directs ou indirects.

La science doit à Euler la première solution régulière et générale de semblables questions, solution encore peu élégante, il est vrai, en raison des considérations infinitésimales, en partie analytiques, en partie géométriques, sur lesquelles elle était basée. L'honneur d'avoir fait disparaître ces dernières imperfections, et d'avoir ramené ce nouveau genre de recherches à une méthode simple et purement analytique, appartient à Lagrange. On peut donc dire en toute justice que les efforts réunis d'Euler et de Lagrange

ont fait naître le *Calcul des Variations*, dont le but principal est la recherche des maxima et minima des intégrales définies.

Tel qu'il sortit des mains de ses illustres inventeurs, le Calcul des Variations constituait une méthode à peu près complète, quand la solution du problème ne dépendait que d'intégrales simples; mais l'application aux intégrales doubles présentait encore de grandes difficultés. Parmi les Géomètres qui ont puissamment contribué à les vaincre, il faut nommer Gauss, qui résolut le premier problème de maximum d'une intégrale double à limites indéterminées; Poisson, qui compléta la théorie des maxima et minima des intégrales doubles; Ostrogradsky, qui donna pour la première fois la variation complète d'une intégrale multiple sous une forme simple et symétrique, quoique encore peu propre aux applications.

Le Calcul des Variations en était là, quand, en 1840, l'Académie des Sciences de Paris proposa pour le concours du grand Prix de Mathématiques la question suivante :

« Trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies pour déterminer complétement les maxima et minima des intégrales multiples. »

Le prix fut décerné à M. Sarrus, auteur d'un grand travail intitulé : *Recherches sur le Calcul des Variations*, qui a été inséré dans les *Mémoires des Savants étrangers*, tome X, 1848.

M. Sarrus avait eu l'heureuse idée d'introduire un

signe particulier pour indiquer les substitutions à faire dans une fonction quelconque, et, par ce simple artifice, il avait pu surmonter les obstacles qui avaient arrêté ses devanciers. Ces obstacles, en effet, consistaient principalement dans la difficulté d'exprimer, comme il l'aurait fallu, que dans telle expression donnée on a remplacé l'une ou l'autre des variables, et souvent même plusieurs variables à la fois, par leurs valeurs limites. La forme sous laquelle M. Sarrus présente la variation d'une intégrale multiple, est moins symétrique que celle de M. Ostrogradsky, mais elle est d'une application plus facile et presque immédiate. Trois exemples donnés à la fin de son Mémoire avaient suffi pour mettre en évidence les avantages de sa méthode, en montrant qu'elle fournit dans tous les cas l'ensemble des équations dont dépend le maximum ou le minimum d'une intégrale simple ou multiple quelconque.

L'innovation de M. Sarrus, l'introduction d'un signe de substitution, parut à M. Cauchy tellement importante, qu'il s'empressa d'en faire le point de départ d'un nouvel exposé du Calcul des Variations, publié, en 1844, dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, tome III, p. 50. Les formules générales de M. Cauchy sont au fond les mêmes que celles de M. Sarrus, mais l'emploi plus étendu de la nouvelle notation, et l'adoption d'un signe de substitution double, pour indiquer la différence entre les résultats de deux substitutions simples faites tour à tour, les a beaucoup simplifiées. Dans ce premier Mémoire, M. Cauchy s'était borné à éta-

blir les principes et les équations fondamentales, il avait réservé pour un second les applications qu'il voulait en faire; malheureusement, ce second Mémoire n'a jamais paru.

Malgré toute notre admiration pour M. Cauchy, nous n'avons pas pu nous résoudre à adopter sa définition nouvelle et généralisée de la *variation* d'une fonction ou quantité. « Lorsque plusieurs fonctions ou quantités, dit-il, page 52, peuvent changer simultanément de valeurs et de formes, leurs variations sont de nouvelles quantités ou de nouvelles fonctions dont les rapports sont égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits des variables et des fonctions proposées. » Sans doute que cette conception élargit le domaine du Calcul des Variations et va jusqu'à lui faire comprendre le Calcul différentiel qui n'en est plus qu'un cas particulier; mais cette généralisation, avantageuse peut-être au point de vue métaphysique, n'a-t-elle pas le grave inconvénient de rendre plus vague encore et plus insaisissable l'idée déjà très-abstraite de la variation d'une fonction? Quand on ne restreint pas la notion de *variation* aux changements de forme de la fonction elle-même, quand on ne l'isole pas des changements de valeurs des variables dont elle dépend, on se voit plus tard dans la nécessité de distinguer plusieurs sortes de variations : *variations totales*, *variations partielles*, *variations propres* de M. Cauchy, *variations tronquées* de M. Sarrus, etc., etc.

Nous avons donc conservé à la *variation* la signifi-

cation essentielle que lui attribuaient Euler et Lagrange; nous la faisons dériver essentiellement du changement de forme apporté à la fonction. De plus, nous écartant encore sur ce point de M. Cauchy, pour rester fidèle à Euler, nous faisons dériver le changement de forme de la fonction du changement de valeur d'un paramètre avec lequel elle est intimement liée, au moyen duquel nous pouvons l'amener à coïncider avec toute fonction donnée des mêmes variables, ou à passer d'une manière continue d'une première forme à une autre forme quelconque. A ce point de vue, la *variation* pouvait être pour nous soit la différentielle, soit la dérivée de la fonction, relative au paramètre variable; nous avons écarté la signification différentielle, afin de ne pas tomber dans les infiniment petits; et pour nous, par conséquent, la *variation est une dérivée partielle* relative au paramètre variable; mais une dérivée qui n'a de sens qu'autant qu'elle se rattache à un changement de forme de la fonction, qui naît réellement de ce changement de forme et disparaît avec lui. Ajoutons, qu'entre la différentielle ou la dérivée le choix était complétement arbitraire; dans la substitution de l'une à l'autre, il n'y a, en effet, rien de changé ni dans les raisonnements, ni dans les équations finales, ni dans les conclusions.

En étudiant attentivement les travaux de M. Sarrus et de Cauchy, nous avons découvert qu'on pouvait abréger grandement les écritures et les formules, souvent fort longues et fort compliquées, en introduisant une notation symbolique qui permît de réu-

nir en un seul les termes analogues ou relatifs aux mêmes limites des variables. Cette simplification a produit un autre avantage : elle a mis en évidence certaines analogies générales qui nous ont permis de formuler en langage ordinaire et en termes assez nets les règles principales du Calcul des Variations.

En outre des travaux que nous venons de rappeler, nous avons beaucoup consulté, surtout pour les applications, l'ouvrage très-remarquable de M. Jellett (*A elementary Treatise on the Calculus of Variations,* Dublin, 1850). Nous sera-t-il permis cependant d'exprimer un regret? Le savant professeur de Trinity-College n'a pas connu les recherches de M. Sarrus, et, pour les intégrales multiples, ses formules n'ont pas toute la généralité désirable. Il suppose partout, en effet, que les limites sont continues ou peuvent être fournies par une seule formule $L < 0$; ce n'est là évidemment qu'un cas très-particulier. En réalité, ces deux reproches se confondent; car, si nous ne nous trompons pas, M. Sarrus s'est placé le premier au point de vue plus général des limites discontinues.

La méthode par laquelle le grand Jacobi a appris à distinguer les maxima et les minima, est un chef-d'œuvre de combinaison analytique; aussi, quoique l'application en soit encore fort restreinte, nous avons fait de sérieux efforts pour la rendre accessible, en mettant à profit l'exposé qu'en ont fait M. Delaunay dans son beau *Mémoire sur le Calcul des Variations,* et M. Hesse dans un article inséré en 1859 dans le *Journal de Crelle.*

Notre rédaction était presque complétement achevée, quand nous avons pu consulter l'ouvrage grandement utile qu'un homme très-initié à la littérature du Calcul des Variations, M. Todhunter, vient de publier sous ce titre : *A History of the Progress of the Calculus of Variations*, by Todhunter, London, 1860.

Il existe en langue allemande un Traité fort volumineux intitulé : *Theorie und Anwendung des sogenannten Variations Calculs*, von Dr G.-W. Strauch, dont la troisième partie, renfermant les applications aux intégrales doubles et triples, a paru en 1859, à Vienne. Ce livre, tout encombré de formules stériles, est suivi d'un Appendice dans lequel le savant auteur s'attache à prouver, par une critique sans fondement et inexorable, que ni M. Sarrus, ni M. Cauchy, ni M. Delaunay n'ont atteint le but qu'ils se sont proposé dans leurs recherches sur le Calcul des Variations. Peu conséquent avec lui-même, tantôt il reproche à M. Sarrus d'avoir séparé des termes qu'on pouvait réunir sous un même signe intégral, pour mieux faire sentir que les variations qu'ils contiennent *peuvent* dépendre les unes des autres; tantôt il reproche à M. Cauchy d'unir en une seule expression, par un double signe de substitution, des termes qu'on pouvait écrire séparément pour mieux indiquer que les variations qu'ils contiennent *peuvent* être indépendantes les unes des autres. Le croirait-on ? M. Strauch va jusqu'à dire que les formules de M. Sarrus ne comprennent même pas la solution de ce problème très-simple : « Trouver l'aire minima entre deux surfaces données. » Et pourtant, dans la vingt-

troisième de nos applications, nous avons résolu ce problème en quelques traits de plume par la méthode de M. Sarrus!

Si nous ne nous faisons pas illusion, ces modestes *Leçons* seront favorablement accueillies, parce qu'elles résument les derniers progrès de cette branche importante de l'Analyse, et les rendent, il nous semble, plus généralement assimilables. Si l'on veut bien comparer nos formules à celles de nos maîtres, M. Sarrus et Cauchy, on verra qu'elles sont devenues beaucoup plus simples, plus nettes et plus élégantes. Ramenés à la forme et aux proportions du signe d'intégration, nos signes de substitution sont devenus plus maniables et constituent une notation classique; l'aspect des équations, toutes compliquées qu'elles restent quelquefois, n'a plus rien de repoussant; nous oserions presque dire qu'elles sont attrayantes. Si ce volume enfin est devenu un chef-d'œuvre d'impression, l'honneur en revient à la supériorité incontestable de l'imprimerie de M. Mallet-Bachelier et à l'habileté sans rivale de M. Bailleul.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES. — THÉORIE. — FORMULES GÉNÉRALES.

CINQUIÈME LEÇON.

SIXIÈME LEÇON.

SEPTIÈME LEÇON.

HUITIÈME LEÇON.



DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ET A LA MÉCANIQUE.

NEUVIÈME LEÇON.

DIXIÈME LEÇON.

ONZIÈME LEÇON.

DOUZIÈME LEÇON.

TREIZIÈME LEÇON.

QUATORZIÈME LEÇON.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS

DE

CALCUL DES VARIATIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES. — THÉORIE. — FORMULES GÉNÉRALES.

PREMIÈRE LEÇON.

Signe de substitution simple et double. — Expressions définies. — Variables principales et leurs limites. — Propriétés du signe de substitution. — Réduction d'une expression définie quelconque à la forme d'une intégrale définie. — Classification des expressions définies. — Notation symbolique.

1. Dans le calcul des variations il arrive constamment qu'une ou plusieurs variables qui entrent dans une fonction, doivent recevoir des valeurs spéciales, et si ce calcul a été longtemps arrêté dans ses développements, c'est qu'il manquait d'un signe pour bien exprimer cette particularisation. On doit à M. Sarrus la première idée d'un semblable signe, idée que M. Cauchy a accueillie avec empressement, mais avec une modification heureuse des notations, que nous adopterons en les simplifiant encore. Le signe dont nous ferons usage et que nous appellerons *signe de substitution,* consiste en un trait incliné, placé en avant de la fonction, auquel on accole la valeur particulière

qu'on doit donner à la variable. Ainsi

$$\Big|^{x=x_1} V, \quad \text{ou simplement} \quad \Big|^{x_1} V,$$

exprimera ce que devient la fonction V, quand la variable x reçoit la valeur particulière x_1. Le même signe $|$ avec deux limites, l'une inférieure x_1, l'autre supérieure x_2,

$$\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} V, \quad \text{ou simplement} \quad \Big|_{x_1}^{x_2} V,$$

exprimera la différence entre les résultats des deux substitutions $x = x_1$, $x = x_2$ dans la fonction V, ou ce que l'on obtient quand, après avoir fait tour à tour dans cette fonction $x = x_1$, $x = x_2$, on retranche le premier résultat du second ; de sorte que

$$\Big|_{x_1}^{x_2} V = \Big|^{x_2} V - \Big|^{x_1} V.$$

Un signe de substitution *double*, tel que $\Big|_{x_1}^{x_2}$, pourra donc toujours être décomposé en deux signes de substitution *simple*, $\Big|^{x_1}$ et $\Big|^{x_2}$.

Nota. Dans l'enseignement oral il est bon qu'on puisse désigner verbalement le signe ou l'acte de la substitution. Nous proposons en conséquence de dire *substitution*, comme on dit *somme*, et *substitution* x_1, *substitution* x_2, ou *substitution* x_1, x_2, comme on dit somme depuis x_1 jusqu'à x_2, ou somme x_1, x_2.

Par suite de cette même notation étendue au cas de plusieurs variables, $\Big|^{x_1} \Big|^{y_1} V$ exprimera qu'il faut d'abord

donner la valeur y_1 à la variable y, et ensuite à la variable x la valeur x_1. De même la notation $\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}$ signifie qu'il faut 1° remplacer tour à tour dans V la variable y par les valeurs y_1 et y_2, et retrancher le premier résultat du second; 2° donner tour à tour à x, dans la différence ainsi obtenue, les valeurs x_1 et x_2, et retrancher de nouveau les deux résultats l'un de l'autre, de sorte que

$$\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}=\Big|_{x_1}^{x_2}\left(\Big|^{y_2}\mathrm{V}-\Big|^{y_1}\mathrm{V}\right)$$
$$=\Big|^{x_2}\Big|^{y_2}\mathrm{V}-\Big|^{x_2}\Big|^{y_1}\mathrm{V}-\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}\mathrm{V}+\Big|^{x_1}\Big|^{y_1}\mathrm{V}.$$

On aurait de même

$$\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}$$
$$=\Big|^{x_2}\Big|^{y_2}\Big|^{z_2}\mathrm{V}-\Big|^{x_2}\Big|^{y_2}\Big|^{z_1}\mathrm{V}-\Big|^{x_2}\Big|^{y_1}\Big|^{z_2}\mathrm{V}+\Big|^{x_2}\Big|^{y_1}\Big|^{z_1}\mathrm{V}$$
$$-\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}\Big|^{z_2}\mathrm{V}+\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}\Big|^{z_1}\mathrm{V}+\Big|^{x_1}\Big|^{y_1}\Big|^{z_2}\mathrm{V}-\Big|^{x_1}\Big|^{y_1}\Big|^{z_1}\mathrm{V}.$$

Pour retrouver avec leurs signes les différents termes du second membre, il suffira de former le produit symbolique

$$\left(\Big|^{x_2}-\Big|^{x_1}\right)\left(\Big|^{y_2}-\Big|^{y_1}\right)\left(\Big|^{z_2}-\Big|^{z_1}\right)\mathrm{V}.$$

Ces deux exemples montrent déjà la simplification considérable qu'on peut tirer en certains cas de l'emploi des signes de substitution double.

2. Les substitutions simples ou doubles se mêlent souvent à des intégrations, qu'elles peuvent précéder ou

suivre selon les circonstances. Ainsi $\Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2} V\,dy$ indiquera qu'il faut d'abord intégrer $V\,dy$ entre les limites y_1 et y_2 et remplacer ensuite x par x_1. Au contraire $\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1} V\,dx$ exige qu'on substitue d'abord y_1 à y dans la fonction V, et qu'on intègre ensuite le résultat multiplié par dx, entre les limites x_1 et x_2. A la rigueur on devrait écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \Big|^{y_1} V \quad \text{au lieu de} \quad \int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1} V\,dx;$$

mais par la même raison que dans les intégrales multiples on ne sépare pas les signes $\int\int\ldots$ par les différentielles dx, dy, etc., nous préférons la seconde manière d'écrire, où les signes $\int$ et $|$ se succèdent immédiatement. Pour la justifier, s'il était nécessaire, on pourrait dire que la différentielle dx n'étant pas fonction de y, n'est pas atteinte par les substitutions qu'on peut faire relativement à cette variable.

Pour ne laisser rien d'obscur, considérons encore la notation

$$\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} V\,dy.$$

Elle exige que l'on fasse d'abord dans la fonction V la substitution double relative à z; qu'on intègre ensuite par rapport à y le résultat obtenu multiplié par dy, et qu'on procède enfin à la substitution double relative à la variable x.

3. Une fonction à laquelle on a fait subir soit des intégrations entre certaines limites, soit des substitutions simples ou doubles, relatives aux variables dont elle dépend, s'appelle *expression définie*. Elle n'est plus

fonction de ces variables, que nous nommerons variables principales, et ne dépend que des paramètres ou constantes indéterminées qu'elle peut renfermer. Dans ce qui suit nous désignerons en général par

$$x, \quad y, \quad z, \ldots, \quad s, \quad t$$

les variables principales qui entrent dans la fonction donnée, par

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \ldots, \quad s_1, \quad t_1$$

les limites inférieures de ces variables, par

$$x_2, \quad y_2, \quad z_2, \ldots, \quad s_2, \quad t_2$$

leurs limites supérieures, par $\varkappa$ un paramètre indéterminé; et nous supposerons toujours, à moins que nous ne disions le contraire, que les substitutions et les intégrations ont lieu successivement par rapport aux variables principales dans l'ordre inverse des lettres $x, y, z, \ldots, s, t$; de sorte que la première opération soit relative à t, la dernière relative à x. Nous admettrons aussi que les limites x_1 et x_2 de x sont indépendantes de toutes les variables principales, tandis que les limites de y pourront être fonctions de x, celles de z fonctions de x et y, et ainsi de suite jusqu'à la variable t, dont les limites seront en général fonctions de $x, y, z, \ldots, s$. Quant au paramètre $\varkappa$, il pourra entrer non-seulement dans la fonction donnée V, mais aussi dans les valeurs limites de toutes les variables principales $x, y, z, \ldots, t$, quoiqu'il doive être bien entendu que ces variables elles-mêmes sont entièrement indépendantes les unes des autres et de $\varkappa$.

4. *Propriétés du signe* $\Big|$. — Le signe de substitution simple, placé devant une fonction composée quelconque, porte sur chacun des éléments qui entrent dans sa formation, de sorte qu'on a

$$\Big|^{x_1} f(u, v, w, \ldots) = f\left(\Big|^{x_1} u, \ \Big|^{x_1} v, \ \Big|^{x_1} w, \ldots\right).$$

De ce principe général on peut tirer plusieurs conséquences parmi lesquelles il nous suffira, pour le moment, de noter les deux suivantes :

1° Lorsque la somme algébrique de plusieurs fonctions est soumise à une ou plusieurs substitutions successives, simples ou doubles, on peut effectuer séparément les substitutions indiquées dans chacune de ces fonctions et prendre la somme algébrique des résultats ainsi obtenus. On aura, par exemple,

$$\Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}(u+v-w)=\Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}u+\Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}v-\Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}w.$$

On pourrait énoncer cette propriété en disant *que la substitution de la somme est égale à la somme des substitutions.*

2° Lorsque le produit de plusieurs fonctions est soumis à une ou plusieurs substitutions *simples*, on peut effectuer séparément les substitutions indiquées dans chaque facteur et former le produit des résultats obtenus. On aura ainsi

$$\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}uvw=\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}u\,.\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}v\,.\Big|^{x_1}\Big|^{y_2}w.$$

Dans le cas de substitutions simples, *la substitution du produit est égal au produit des substitutions.*

Si la quantité qui se trouve engagée sous un signe de substitution simple, est constante, ou seulement indépendante de la variable à laquelle se rapporte la substitution indiquée, le signe $|$ est sans effet aucun et peut être supprimé. On a évidemment

$$\Big|^{x_1}k=k,\quad \Big|^{x_2}k=k,\quad \Big|^{x_1}ku=k\Big|^{x_1}u,\quad \Big|^{x_2}ku=k\Big|^{x_2}u,$$

lorsque k est constant ou indépendant de x, et par suite

$$\Big|_{x_1}^{x_2}k=0,\qquad \Big|_{x_1}^{x_2}ku=k\Big|_{x_1}^{x_2}u.$$

Les facteurs constants restent en dehors des substitutions; la substitution double d'une constante est nulle.

5. Lorsqu'une expression définie quelconque est soumise à une nouvelle substitution simple, au lieu de l'effectuer dans le résultat définitif de toutes les opérations indiquées par les signes $\int$ et $|$, rien n'empêche de la faire séparément dans la fonction V et dans les limites de chacune des variables auxquelles se rapportent ces opérations. On pourrait même faire la substitution seulement dans quelques-unes des quantités V, t_1, t_2, s_1, s_2, ..., qui constituent l'expression définie proposée, mais alors on serait obligé de la renouveler à la fin du calcul.

Supposons, pour fixer les idées, que V contienne trois variables indépendantes x, y, z, et qu'on veuille calculer

$$\Big|^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} V dy, \quad \text{ou faire } x = x_1 \text{ dans } \quad \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} V dy,$$

expression qui est évidemment fonction de la seule variable x. Puisque cette variable x entre dans la fonction V ainsi que dans les limites z_1, z_2, y_1, y_2, sans être atteinte ni par la substitution relative à z, ni par l'intégration relative à y, on arrivera au même but, en faisant séparément $x = x_1$ dans chacun des éléments V, z_1, z_2, y_1, y_2, qui constituent, pour ainsi dire, l'expression donnée. Mais il est évident que si l'on ne faisait $x = x_1$ que dans quelques-uns de ces éléments, la variable x ne serait pas complétement remplacée; il faudrait par conséquent renouveler la substitution $x = x_1$ dans le résultat obtenu.

Ces raisonnements conduisent sans peine à la conclusion générale, que dans les expressions définies on peut faire les substitutions simples autant de fois et à telle place qu'on veut, pourvu qu'en dernier lieu on les fasse à

la place ou dans l'ordre indiqué par la notation primitive. On aura par exemple identiquement

$$\int^{x_1}\int_{y_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,dy = \int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\int^{x_1} V\,dy$$
$$= \int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int^{x_1}\int_{z_1}^{z_2}\int^{x_1} V\,dy.$$

6. Ce même principe de la *répétition des substitutions simples* peut servir à réduire une expression définie à la forme d'une intégrale définie toutes les fois que les substitutions qu'elle renferme sont simples. Il suffit en effet pour cela d'effectuer séparément les substitutions dans la fonction V et dans les limites des intégrations. Prenons pour exemple l'expression

$$\int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_1}\int_{t_1}^{t_2} V\,dt\,dy,$$

V étant supposé fonction des quatre variables x, y, z, t. Si l'on effectue les substitutions indiquées dans chacune des quantités V, t_1, t_2, y_1, y_2, et qu'on désigne respectivement par V', t'_1, t'_2, y'_1, y'_2, les résultats de ces substitutions, de sorte que

$$V' = \int^{x_1}\int^{z_1} V,$$

$$t'_1 = \int^{x_1}\int^{z_1} t_1,\quad t'_2 = \int^{x_1}\int^{z_1} t_2,\quad y'_1 = \int^{x_1} y_1,\quad y'_2 = \int^{x_1} y_2,$$

l'expression proposée deviendra

$$\int_{y'_1}^{y'_2}\int_{t'_1}^{t'_2} V'\,dt\,dy,$$

et prendra ainsi la forme d'une intégrale définie. Ajoutons que, par suite des substitutions effectuées, V' est fonction de y et t; t'_1 et t'_2 sont fonctions de y, tandis que

y'_1 et y'_2 sont constantes; de sorte que y et t sont les seules variables qui figurent réellement dans cette intégrale.

Si l'on ne tenait pas à rendre les substitutions visibles, on pourrait supprimer les signes $| |$ et écrire simplement

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\, dt\, dy, \quad \text{au lieu de} \quad \Big|^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \Big|^{z_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\, dt\, dy,$$

en sous-entendant qu'on devrait faire préalablement $z = z_1$ et $x = x_1$ dans celles des fonctions V, t_1, t_2, y_1, y_2, qui dépendent des variables z et x.

Lorsque l'expression donnée renfermera des substitutions doubles, on les décomposera d'abord en substitutions simples et l'on transformera séparément chaque terme du résultat, ce qui donnera une suite d'intégrales définies.

Une expression définie est invariable tant que les constantes indéterminées qu'elle renferme conservent des valeurs fixes. Mais si l'une de ces constantes $\varkappa$, devenue paramètre variable, change de valeur, l'expression définie variera elle-même, en tant que fonction de ce paramètre, et pourra être différentiée par rapport à lui. Le calcul des variations, comme nous le verrons dans la suite, se réduit en effet à la recherche des dérivées des expressions définies; il faut donc avant tout exposer les règles générales de la différentiation de ce genre d'expressions, qui sont de trois espèces : 1° expressions définies *par substitution*, ou qui résultent uniquement de substitutions; 2° expressions définies *par intégration*, ou intégrales définies; 3° expressions définies *mixtes*, ou qui résultent à la fois de substitutions et d'intégrations se succédant dans un ordre quelconque.

7. Nous considérerons successivement ces trois espèces d'expressions définies et nous chercherons leurs dérivées relatives à un paramètre $\varkappa$, contenu tant dans la fonction

donnée V que dans les limites des variables $x, y, z, \ldots, t$; mais avant tout, pour simplifier les formules, qui sans cela deviendraient très-complexes, et pour leur donner toute la clarté, toute la symétrie possibles, nous ferons une nouvelle convention. Comme les variables $\varkappa, x, y, z, \ldots, t$ sont indépendantes les unes des autres, on ne saurait attacher aucune idée aux quotients différentiels

$$\frac{dx}{d\varkappa}, \quad \frac{dy}{d\varkappa}, \quad \frac{dz}{d\varkappa}, \ldots, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx}, \ldots, \quad \frac{dz}{dy}, \ldots;$$

cependant nous ferons usage de ces symboles précédés d'un signe de substitution, et nous leur donnerons la signification déterminée par les formules

$$\Big|^{x_1} \frac{dx}{d\varkappa} = \frac{dx_1}{d\varkappa}, \quad \Big|^{y_1} \frac{dy}{d\varkappa} = \frac{dy_1}{d\varkappa}, \ldots, \quad \Big|^{y_1} \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}, \ldots,$$

$$\Big|^{x_2} \frac{dx}{d\varkappa} = \frac{dx_2}{d\varkappa}, \quad \Big|^{y_2} \frac{dy}{d\varkappa} = \frac{dy_2}{d\varkappa}, \ldots, \quad \Big|^{y_2} \frac{dy}{dx} = \frac{dy_2}{dx}, \ldots;$$

c'est-à-dire que la dérivée de l'une quelconque des variables indépendantes $x, y, z, \ldots, t$, laquelle en elle-même n'a aucun sens, représentera pour nous la dérivée de celle des limites inférieure ou supérieure de cette même variable accolée au signe de substitution. Cette convention s'étendra également aux dérivées des ordres supérieurs.

Il n'est pas même nécessaire que le signe de substitution précède immédiatement la dérivée symbolique pour en déterminer le sens; il pourrait en être séparé par d'autres signes soit de substitution, soit d'intégration, ou par un facteur, sans que la signification de la dérivée cessât d'être déterminée. C'est une conséquence naturelle du principe de la répétition des substitutions (n° 5).

On aura par exemple

$$\Big|^{x_1}\Big|^{y_2} u\,\frac{dx}{d\varkappa}\,\frac{dy}{dx} = \Big|^{x_1}\Big|^{y_2} u\,\Big|^{x_1}\frac{dx}{d\varkappa}\Big|^{y_2}\frac{dy}{dx} = \Big|^{x_1}\Big|^{y_2} u\,\frac{dx_1}{d\varkappa}\,\frac{dy_2}{dx};$$

de même

$$\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} u\,\frac{dx}{d\varkappa}\,\frac{dz}{dy}\,dy$$

$$= \Big|^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2} u\,\frac{dx_2}{d\varkappa}\,\frac{dz_2}{dy}\,dy - \Big|^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1} u\,\frac{dx_2}{d\varkappa}\,\frac{dz_1}{dy}\,dy$$

$$- \Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2} u\,\frac{dx_1}{d\varkappa}\,\frac{dz_2}{dy}\,dy + \Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1} u\,\frac{dx_1}{d\varkappa}\,\frac{dz_1}{dy}\,dy.$$

L'avantage principal de cette notation symbolique est de permettre de réunir en un seul terme plusieurs expressions définies qui renferment les dérivées correspondantes des deux limites d'une ou de plusieurs variables, ce qui simplifiera beaucoup la recherche des variations des intégrales multiples.

DEUXIÈME LEÇON.

Règles de la différentiation des expressions définies. — Dérivées des expressions définies par substitution. — Dérivées des intégrales définies. — Dérivées des expressions définies mixtes. — Intégration par parties des expressions définies mixtes.

8. Premier cas. — *Expressions définies par substitution.* — Supposons d'abord que V renferme les seules variables $\varkappa$ et x, ou que l'on ait $V = f(\varkappa, x)$; l'expression

$$\int^{x_1} V = f(\varkappa, x_1)$$

dépendra du seul paramètre $\varkappa$, et il s'agit de la différentier par rapport à lui. On aura évidemment

$$\frac{d}{d\varkappa}\int^{x_1} V = \frac{df(\varkappa, x_1)}{d\varkappa} + \frac{df(\varkappa, x_1)}{dx_1}\frac{dx_1}{d\varkappa}.$$

Or

$$\frac{df(\varkappa, x_1)}{d\varkappa} = \int^{x_1}\frac{dV}{d\varkappa}, \quad \frac{df(\varkappa, x_1)}{dx_1} = \int^{x_1}\frac{dV}{dx},$$

et, d'après la convention admise,

$$\frac{dx_1}{d\varkappa} = \int^{x_1}\frac{dx}{d\varkappa};$$

donc

$$\frac{d}{d\varkappa}\int^{x_1} V = \int^{x_1}\left(\frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right).$$

On trouverait de même

$$\frac{d}{d\varkappa}\int^{x_2} V = \int^{x_2}\left(\frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right),$$

et, en retranchant de cette équation la précédente,

(1) $$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dx}\,\frac{dx}{d\varkappa}\right).$$

c'est-à-dire que pour obtenir la dérivée de $\int^{x_1} \mathrm{V}$, $\int^{x_2} \mathrm{V}$, $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}$, par rapport à $\varkappa$, il suffira de différentier sous le signe de substitution comme si x était fonction de $\varkappa$.

Si V renferme les trois variables $\varkappa$, x, y, ou si l'on a $\mathrm{V} = f(\varkappa, x, y)$, et qu'on demande la dérivée de $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}$ par rapport à $\varkappa$, on remplacera V par $\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}$ dans la dernière équation, qui deviendra

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{d\varkappa}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} + \frac{dx}{d\varkappa}\,\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\right).$$

Cette même équation (1) donne d'ailleurs

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\,\frac{dy}{d\varkappa}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right);$$

en substituant ces valeurs, et considérant que le facteur symbolique $\frac{dx}{d\varkappa}$, tenant la place soit de $\frac{dx_1}{d\varkappa}$, soit de $\frac{dx_2}{d\varkappa}$, ne dépend point de y, et qu'il est permis par conséquent de le faire passer sous le signe $\int_{y_1}^{y_2}$, on arrive à l'équation

suivante :

$$(2)\quad \frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left\{\frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa} + \frac{dV}{dy}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\}.$$

La somme affectée des signes de substitution est évidemment la dérivée totale de V prise par rapport à $\varkappa$, comme si chacune des variables $\varkappa$, x, y était fonction de celles qui la précèdent, x fonction de $\varkappa$, y fonction de $\varkappa$ et de x.

Considérons encore l'expression $\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V$, dans laquelle V est fonction des variables $\varkappa$, x, y, z, et dont il faut trouver la dérivée par rapport à $\varkappa$. En remplaçant dans l'équation précédente

$$V \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2} V,$$

$$\frac{dV}{d\varkappa} \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{d\varkappa}\right),$$

$$\frac{dV}{dx} \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dx}\right),$$

$$\frac{dV}{dy} \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dy}\right),$$

et faisant passer les facteurs $\frac{dx}{d\varkappa}$, $\frac{dy}{d\varkappa}$, $\frac{dy}{dx}$, sous le nouveau signe de substitution $\int_{z_1}^{z_2}$, ce qui est permis, puisque les limites x_1, x_2, y_1, y_2, elles-mêmes, et par suite leurs dérivées, sont indépendantes de z ; on verra que l'ensemble des termes affectés dans l'équation (2) des signes de substitution, auxquels s'est joint le signe relatif à t, s'accroît du terme

$$\frac{dV}{dz}\left[\frac{dz}{d\varkappa} + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa} + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right]$$

et devient la dérivée totale de V prise par rapport à $\varkappa$, comme si chacune des variables $\varkappa$, x, y, z était fonction de celles qui la précèdent. Si l'on désigne cette dérivée par $\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right]$, on aura donc

$$(3) \qquad \frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right].$$

Le même raisonnement, appliqué successivement à un nombre de variables de plus en plus grand, conduirait évidemment à la formule générale

$$(4) \qquad \frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2} V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right],$$

dans laquelle $\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right]$ désigne la dérivée totale de V relative à $\varkappa$, prise comme si chacune des variables $\varkappa, x, y, z, \ldots, t$ était fonction de toutes celles qui la précèdent. La signification réelle de cette formule symbolique, après les explications données, n'a rien d'obscur. Quand on aura formé la dérivée totale $\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right]$, on décomposera la substitution double $\int_{t_1}^{t_2}$ en deux substitutions simples, on remplacera $\frac{dt}{d\varkappa}, \frac{dt}{dx}, \frac{dt}{dy}, \frac{dt}{dz}, \cdots$, par $\frac{dt_1}{d\varkappa}$, $\frac{dt_1}{dx}, \frac{dt_1}{dy}, \frac{dt_1}{dz}, \cdots$, dans tous les termes précédés du signe $\int^{t_1}$, et par $\frac{dt_2}{d\varkappa}, \frac{dt_2}{dx}, \frac{dt_2}{dy}, \frac{dt_2}{dz}, \cdots$, dans les termes précédés du signe $\int^{t_2}$; on fera ensuite pour les autres variables $s, \ldots, z, y, x$, ce que l'on a fait pour t, et l'on arrivera à la valeur définitive de la dérivée cherchée.

9. La démonstration rigoureuse de la formule générale (4) est d'ailleurs très-facile; il suffira, comme c'est la marche ordinaire en pareil cas, de prouver que si elle est vraie pour $n-1$ variables, elle l'est encore pour n variables. Admettons, en effet, qu'elle est vraie pour les variables $x, y, z, \ldots, s$; l'ensemble des termes affectés des substitutions relatives à ces variables sera

$$\frac{dV}{d\varkappa}+\frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{dV}{dy}\left[\frac{dy}{d\varkappa}\right]+\frac{dV}{dz}\left[\frac{dz}{d\varkappa}\right]+\ldots+\frac{dV}{ds}\left[\frac{ds}{d\varkappa}\right],$$

les dérivées totales $\left[\frac{dy}{dx}\right], \left[\frac{dz}{d\varkappa}\right], \ldots, \left[\frac{ds}{d\varkappa}\right]$ devant être prises comme si chacune des variables $\varkappa, x, y, z, \ldots, s$ était fonction de toutes celles qui la précèdent. Si pour introduire une nouvelle variable t, nous remplaçons V par $\int_{t_1}^{t_2} V$, il faudra en même temps remplacer

$$\frac{dV}{d\varkappa} \quad \text{par} \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dV}{d\varkappa}+\frac{dV}{dt}\frac{dt}{d\varkappa}\right),$$

$$\frac{dV}{dx} \quad \text{par} \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dx}\right),$$

$$\frac{dV}{dy} \quad \text{par} \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dy}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dV}{ds} \quad \text{par} \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dV}{ds}+\frac{dV}{dt}\frac{dt}{ds}\right);$$

l'ensemble des termes affectés des signes de substitution, auxquels s'est joint le signe relatif à t, se sera accru du nouveau terme

$$\frac{dV}{dt}\left\{\frac{dt}{d\varkappa}+\frac{dt}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{dt}{dy}\left[\frac{dy}{d\varkappa}\right]+\ldots+\frac{dt}{ds}\left[\frac{ds}{d\varkappa}\right]\right\},$$

et deviendra précisément la dérivée totale de V par rap-

port à $\varkappa$, prise comme si chacune des variables $\varkappa$, x, y, $z, \ldots, s$, t était fonction de toutes celles qui la précèdent. Donc si la formule est vraie pour $n - 1$ variables, elle le sera encore pour n. Or elle est demontrée directement dans le cas de trois variables; donc elle subsistera quel que soit le nombre des variables affectées de substitutions.

10. Tout ce que nous venons de dire des expressions définies qui renferment un ou plusieurs signes de substitution double

$$\Big|_{x_1}^{x_2}, \quad \Big|_{y_1}^{y_2}, \quad \Big|_{z_1}^{z_2}, \ldots, \quad \Big|_{t_1}^{t_2},$$

s'applique de même et sans aucun changement aux expressions dans lesquelles tous ces signes ou quelques-uns d'entre eux sont remplacés par des signes simples. On aura ainsi, par exemple,

$$\frac{d}{d\varkappa}\Big|^{x_1}\Big|^{y_1}\Big|^{z_1}\cdots\Big|^{t_1}\mathrm{V} = \Big|^{x_1}\Big|^{y_1}\Big|^{z_1}\cdots\Big|^{t_1}\left[\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}\right],$$

la dérivée symbolique $\left[\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}\right]$ étant formée d'après la même loi de dépendance rétrograde entre les variables. Cette formule, à laquelle on parviendrait directement par des raisonnements analogues à ceux qui nous ont conduit à l'équation (4), est d'ailleurs assez évidente en elle-même pour qu'on puisse l'écrire immédiatement; car le seul fait des substitutions successives de $t_1, s_1, \ldots, z_1, y_1, x_1$ établit entre les variables principales $x, y, z, \ldots, t$, contenues dans la fonction V, une dépendance telle que chacune est essentiellement fonction de toutes celles qui la précèdent et de $\varkappa$. Évidente quand il s'agit de substitutions simples, cette formule ne le sera pas moins dans le cas de substitutions doubles, puisqu'une expression définie à substitutions doubles est, comme on l'a vu, la somme ou la

différence d'expressions définies à substitutions simples, et que la dérivée de la somme ou de la différence est égale à la somme ou à la différence des dérivées.

11. Deuxième cas. — *Intégrales définies.* — Pour trouver la dérivée de l'intégrale définie simple

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx,$$

dans laquelle la fonction V ainsi que les limites x_1 et x_2 dépendent du paramètre $\varkappa$, donnons à ce paramètre un accroissement $\Delta\varkappa$, et désignons respectivement par ΔV, Δx_1, Δx_2, les accroissements correspondants de V, x_1, x_2. L'accroissement de l'intégrale sera évidemment

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} (V + \Delta V)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} V\,dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \Delta V\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} (V+\Delta V)\,dx \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} (V+\Delta V)\,dx. \end{aligned}$$

Or, si les fonctions V et ΔV croissent par degrés insensibles et ne deviennent pas infinies entre les limites x_1 et $x_1 + \Delta x_1$, le dernier terme est égal au produit de la différence entre les limites ou Δx_1 par une valeur moyenne de la fonction $V + \Delta V$ entre ces mêmes limites. Désignons par $\Big/^{x_1} V + \varepsilon_1$ cette valeur moyenne, ε_1 étant nécessairement une quantité qui disparaît avec $\Delta\varkappa$, il en résulte

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} (V + \Delta V)\,dx = \Delta x_1 \left(\varepsilon_1 + \Big/^{x_1} V\right).$$

On aura de même, en admettant que V et ΔV croissent

par degrés insensibles et ne deviennent pas infinies entre les limites x_2 et $x_2 + \Delta x_2$,

$$\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} (V + \Delta V)\, dx = \Delta x_2 \left(\varepsilon_2 + \int^{x_2} V \right),$$

ε_2 étant une nouvelle quantité qui s'évanouit avec $\Delta \varkappa$. On peut donc écrire

$$\Delta S = \int_{x_1}^{x_2} \Delta V\, dx + \Delta x_2 \left(\varepsilon_2 + \int^{x_2} V \right) - \Delta x_1 \left(\varepsilon_1 + \int^{x_1} V \right).$$

En divisant par $\Delta \varkappa$ les deux membres de cette équation, et passant à la limite, on trouve

$$\frac{dS}{d\varkappa} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{d\varkappa}\, dx + \frac{dx_2}{d\varkappa} \int^{x_2} V - \frac{dx_1}{d\varkappa} \int^{x_1} V,$$

ou simplement

(5) $$\frac{dS}{d\varkappa} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{d\varkappa}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} V \frac{dx}{d\varkappa},$$

en faisant usage de la notation symbolique adoptée.

Considérons maintenant l'intégrale double

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V\, dy\, dx,$$

et cherchons sa dérivée par rapport à $\varkappa$, en supposant que la fonction V ainsi que les limites x_1, x_2, y_1, y_2 dépendent de ce paramètre. Si, dans la formule (5) relative à l'intégrale simple, on remplace V par $\int_{y_1}^{y_2} V\, dy$, on trouve

$$\frac{dS}{d\varkappa} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{d\varkappa} \int_{y_1}^{y_2} V dy + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{d\varkappa} \int_{y_1}^{y_2} V dy$$

Cette même formule (5) donne d'ailleurs

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{y_1}^{y_2} V dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dV}{d\varkappa} dy + \Big|_{y_1}^{y_2} V \frac{dy}{d\varkappa}.$$

En introduisant cette valeur et faisant passer sous le signe intégral relatif à y le facteur $\frac{dx}{d\varkappa}$, qui se trouve dans le second terme, ce qui est permis puisque ce facteur symbolique, représentant $\frac{dx_1}{d\varkappa}$ ou $\frac{dx_2}{d\varkappa}$, est indépendant de la variable y, on arrive à la formule

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{d\varkappa} &= \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{dV}{d\varkappa} dy dx + \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} V \frac{dy}{d\varkappa} dx \\ &+ \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V \frac{dx}{d\varkappa} dy. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir la dérivée par rapport à $\varkappa$ de l'intégrale triple

$$S = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V dz dy dx,$$

on remplacera dans la formule (6) relative à l'intégrale double

$$V \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2} V dz$$

et

$$\frac{dV}{d\varkappa} \quad \text{par} \quad \int_{z_1}^{z_2} \frac{dV}{d\varkappa} dz + \Big|_{z_1}^{z_2} V \frac{dz}{d\varkappa}:$$

on fera passer sous le signe intégral relatif à z les facteurs symboliques $\frac{dx}{d\varkappa}$ et $\frac{dy}{d\varkappa}$, indépendants de cette variable, et

on trouvera

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} &= \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dV}{dx}\,dzdydx + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} V\,\frac{dz}{dx}\,dydx \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,\frac{dy}{dx}\,dzdx + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,\frac{dx}{dx}\,dzdy.
\end{aligned}
\right.
$$

12. La loi de la formation des termes successifs est déjà assez nettement indiquée pour qu'on puisse écrire la formule générale suivante :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2} V dt\ldots dzdydx \\
&= \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2}\frac{dV}{dx}\,dt\ldots dzdydx \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\Big|_{t_1}^{t_2} V\,\frac{dt}{dx}\ldots dzdydx \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2} V\,\frac{dz}{dx}\,dt\ldots dydx \\
&+ \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2} V\,\frac{dy}{dx}\,dt\ldots dzdx \\
&+ \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots\int_{t_1}^{t_2} V\,\frac{dx}{dx}\,dt\ldots dzdy.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour démontrer rigoureusement cette formule, il suffirait de montrer que si elle est vraie pour $n-1$ variables $x, y, z, \ldots, s$, elle l'est encore pour n variables $x, y, z, \ldots, s, t$, ce qu'on pourrait faire en suivant la même marche que dans le cas des expressions définies par substitution.

Interprétée en langage ordinaire, cette formule fournit la règle suivante :

Pour obtenir la dérivée d'une intégrale multiple quelconque relative à un paramètre $\varkappa$ qui entre non-seulement dans la fonction V, *mais aussi dans les limites des intégrations, il faut*: 1° *prendre en dedans des signes d'intégration la dérivée de la fonction* V *par rapport à* $\varkappa$; 2° *ajouter au premier terme ainsi obtenu un nombre de termes égal à celui des variables, et dont chacun se déduit de l'intégrale proposée en changeant tour à tour le signe d'intégration relatif à chaque variable en signe de substitution double correspondant et remplaçant en même temps la différentielle de la variable par sa dérivée relative au paramètre dont il s'agit.*

13. Troisième cas. — *Expressions définies mixtes.* — Pour simplifier le langage, nous distinguerons les variables principales qui entrent dans une expression définie mixte, en deux catégories : nous appellerons *variables de substitution* celles qui sont l'objet de substitutions ou par rapport auxquelles on substitue, et *variables d'intégration* celles par rapport auxquelles on intègre.

On trouvera dans tous les cas la dérivée d'une expression définie mixte, en appliquant convenablement et tour à tour les formules (4) et (8). Prenons, par exemple, pour point de départ la formule relative aux intégrales simples

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}\,dx + \Big|_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\,\frac{dx}{d\varkappa};$$

remplaçons V par $\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}$, et par conséquent

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} \quad \text{par} \quad \Big|_{y_1}^{y_2} \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\frac{dy}{d\varkappa}\right),$$

et faisons passer sous le signe de substitution relatif à y le facteur $\frac{dx}{d\chi}$, ce qui est permis, puisque ce facteur est indépendant de la variable y; il viendra

$$\frac{d}{d\chi}\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\chi}+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\frac{dy}{d\chi}\right)dx$$
$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}\frac{dx}{d\chi}.$$

Si dans cette nouvelle équation on remplace V par $\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}dz$, et par conséquent

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\chi} \text{ par } \int_{z_1}^{z_2}\frac{d\mathrm{V}}{d\chi}dz+\Big|_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\frac{dz}{d\chi},$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dy} \text{ par } \int_{z_1}^{z_2}\frac{d\mathrm{V}}{dy}dz+\Big|_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\frac{dz}{dy},$$

et qu'on fasse passer les facteurs $\frac{dx}{d\chi}$ et $\frac{dy}{d\chi}$ sous les signes de substitution ou d'intégration relatifs à la nouvelle variable z, qui n'entre point dans ces facteurs, on trouvera de même :

$$\frac{d}{d\chi}\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\,dz\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\chi}+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\frac{dy}{d\chi}\right)dz\,dx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\left(\frac{dz}{d\chi}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\chi}\right)dx$$
$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\frac{dx}{d\chi}\,dz.$$

Par un procédé tout à fait identique on établirait suc-

cessivement les formules suivantes :

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right),$$

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)dy$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right),$$

$$\frac{d}{d\varkappa}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{V}\,dy$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left\{\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{dx}{d\varkappa} + \frac{d\mathrm{V}}{dz}\left(\frac{dz}{d\varkappa} + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\}dy$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{V}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right).$$

14. Il est aisé de voir qu'une suite d'opérations semblables, convenablement choisies et exécutées, conduirait à la dérivée d'une expression définie quelconque. Partant d'abord d'une expression qui ne renferme qu'une variable principale, on passerait successivement au cas de deux, trois variables, etc., en mettant toujours à la place de la fonction V une nouvelle expression définie. Or, si l'on applique cette marche à un nombre suffisant d'exemples, et qu'on examine attentivement les valeurs finales des dérivées obtenues, on ne tarde pas à entrevoir la loi de formation des termes dont elles se composent, et à découvrir la règle générale de dérivation, qu'on peut énoncer comme il suit :

Règle générale. — *Pour obtenir la dérivée relative à $\varkappa$ d'une expression définie, résultant d'un nombre quelconque de substitutions ou d'intégrations à opérer sur une fonction* V, *il faut :* 1° *prendre en dedans des*

signes de substitution et d'intégration la dérivée totale de la fonction V *par rapport à* $\varkappa$; 2° *ajouter au premier terme ainsi obtenu un nombre de termes égal à celui des intégrations, et dont chacun se déduit de l'expression définie donnée, en changeant tour à tour le signe d'intégration relatif à une variable en signe de substitution double correspondant, et remplaçant en même temps la différentielle de cette variable par sa dérivée totale relative à* $\varkappa$. *Quant à la dérivée totale soit de* V, *soit de* $x, y, z, \ldots,$ *que doit renfermer un terme quelconque, elle sera formée, comme si chacune des variables de substitution qui entrent dans ce terme, était fonction de toutes celles qui la précèdent, et de* $\varkappa$.

15. Il n'est pas difficile de prouver que si cette règle est vraie pour $n - 1$ variables, elle le sera encore pour n variables. Admettons, en effet, qu'elle est vraie pour une expression définie renfermant les variables principales $x, y, z, \ldots, s$, et examinons d'abord ce qui arrive, si l'on remplace V par $\int_{t_1}^{t_2}$ V dans la dérivée de cette expression. Le signe $\int_{t_1}^{t_2}$ prend place dans tous les termes à la suite des autres signes de substitution et d'intégration, et tous ces termes conservent leur forme, à l'exception du premier, lequel d'après la règle générale devait renfermer la dérivée totale de V relative à $\varkappa$, formée comme si chacune des variables de substitution était fonction de toutes celles qui la précèdent et de $\varkappa$, et qui, actuellement, renferme la dérivée totale de $\int_{t_1}^{t_2}$ V prise dans la même hypothèse. Mais si l'on développe cette nouvelle dérivée totale, on retrouvera encore, sous le signe de substitution relatif à t, la

dérivée totale de V, prise cette fois, ainsi que cela doit être, sous la condition que la relation de dépendance rétrograde entre les variables de substitution s'étend à la variable t. La dérivée de la nouvelle expression définie à n variables, du moins lorsque la $n^{ième}$ variable est affectée d'un signe de substitution, rentre donc tout à fait dans la règle générale.

Il en sera de même, si cette nouvelle variable est affectée d'intégration. En effet, si nous remplaçons V par $\int_{t_1}^{t_2} V\,dt$ dans la dérivée de l'expression définie à $n-1$ variables, le signe $\int_{t_1}^{t_2}$ s'introduit dans chaque terme à la suite des autres signes de substitution et d'intégration, et tous les termes conservent leur forme, à l'exception du premier, dans lequel la dérivée totale de $\int_{t_1}^{t_2} V\,dt$ doit remplacer celle de V. Mais, en effectuant les calculs, on reconnaîtra que ce premier terme se partage en deux autres, renfermant l'un la dérivée totale de V affectée du signe intégral $\int_{t_1}^{t_2}$, l'autre le produit de V par la dérivée totale de t, affecté du signe de substitution $\Big|_{t_1}^{t_2}$; et ce résultat est parfaitement conforme à la règle générale. Il est donc bien prouvé que, vraie pour $n-1$ variables, cette règle l'est encore pour n variables; or elle est vraie évidemment dans le cas d'une seule variable; donc elle le sera quel que soit le nombre des variables.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'expression à différentier ne contenait que des signes de substitution double; mais on pourrait évidemment les remplacer tous, ou en

partie, par des signes de substitution simple, sans avoir rien à changer à la série des raisonnements qui précèdent. La règle établie conduira donc également à la dérivée des fonctions définies renfermant des substitutions simples.

16. Il ne sera pas inutile d'indiquer en peu de mots comment on peut arriver plus directement à la règle générale que nous venons d'établir. S'il s'agit de différentier une expression définie mixte, ne renfermant que des substitutions simples, on pourra lui donner d'abord la forme d'une intégrale définie (n° 6), et appliquer ensuite la règle de la différentiation des intégrales, ou la formule (8). Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de différentier l'expression

$$S = \Big|^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \Big|^{z_1} \int_{t_1}^{t_2} V\,dtdy.$$

D'après le n° 6, il est permis de supprimer les signes de substitution et d'écrire simplement

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} V\,dtdy,$$

pourvu qu'on ait fait préalablement $x = x_1$ et $z = z_1$ dans celles des fonctions V, t_1, t_2, y_1, y_2, où entrent les variables x et z. On aura donc, toujours en admettant cette même hypothèse, en vertu de la formule (8),

$$\frac{dS}{dz} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{dV}{dz}\right] dtdy + \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{t_1}^{t_2} V \left[\frac{dt}{dz}\right] dy$$
$$+ \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} V \left[\frac{dy}{dz}\right] dt,$$

pourvu que, dans la formation des dérivées totales $\left[\frac{dV}{dz}\right]$, $\left[\frac{dt}{dz}\right]$, $\left[\frac{dy}{dz}\right]$, on tienne compte des substitutions sous-en-

tendues. Or, puisque les variables x et z, devenues x_1 et z_1, entrent dans la fonction V et dans les limites t_1, t_2, représentées toutes deux par la lettre t dans la dérivée symbolique $\left[\frac{dt}{d\varkappa}\right]$, et que la première des deux variables entre seule dans les limites y_1 et y_2, représentées toutes deux par la lettre y dans la dérivée symbolique $\left[\frac{dy}{d\varkappa}\right]$, les valeurs effectives de ces trois dérivées seront :

$$\left[\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}\right]=\Big|^{x_1}\Big|^{z_1}\left\{\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}+\frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{d\mathrm{V}}{dz}\left(\frac{dz}{d\varkappa}+\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\},$$

$$\left[\frac{dt}{d\varkappa}\right]=\Big|^{x_1}\Big|^{z_1}\left\{\frac{dt}{d\varkappa}+\frac{dt}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{dt}{dz}\left(\frac{dz}{d\varkappa}+\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\},$$

$$\left[\frac{dy}{d\varkappa}\right]=\Big|^{x_1}\left(\frac{dy}{d\varkappa}+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right).$$

Si l'on introduit ces valeurs dans la dérivée $\frac{d\mathrm{S}}{d\varkappa}$ et qu'on rétablisse les signes de substitution, on obtiendra définitivement

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\varkappa}=\Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{d\mathrm{V}}{d\varkappa}+\frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{d\mathrm{V}}{dz}\left(\frac{dz}{d\varkappa}+\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\}dt\,dy$$
$$+\Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{V}\left\{\frac{dt}{d\varkappa}+\frac{dt}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}+\frac{dt}{dz}\left(\frac{dz}{d\varkappa}+\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)\right\}dy$$
$$+\Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{V}\left(\frac{dy}{d\varkappa}+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right)dt.$$

Comme les expressions définies qui renferment des substitutions doubles, se partagent en plusieurs expressions ne renfermant que des substitutions simples, et dont chacune donne une dérivée exactement de même forme, sauf les limites différentes accolées aux signes de substitution, la formule précédente subsisterait encore si l'on changeait

les substitutions simples $\Big|^{x_1}, \Big|^{z_1}$, en substitutions doubles $\Big|_{x_1}^{x_2}, \Big|_{z_1}^{z_2}$.

Pour peu qu'on réfléchisse à la marche suivie dans cet exemple, on est bientôt convaincu qu'elle conduira à la dérivée d'une expression définie quelconque, renfermant avec les intégrations soit des substitutions simples, soit des substitutions doubles; qu'il suffira pour cela de prendre la dérivée de l'expression définie, comme si c'était une intégrale définie, en négligeant les signes de substitution, pourvu que dans la formation des dérivées soit de V, soit de t, s, ..., on tienne compte des substitutions sous-entendues, en ce sens qu'on traite chacune des variables auxquelles se rapportent ces substitutions, comme une fonction de toutes celles qui la précèdent et de $\varkappa$; dans le résultat ainsi obtenu on rétablira ensuite les signes de substitution à leur place primitive.

On reconnaît sans peine que cette marche à suivre est précisément celle qui résulte de la règle générale déjà formulée.

17. Nous allons montrer par quelques exemples combien son application est facile. Veut-on, par exemple, la dérivée par rapport à $\varkappa$ de l'expression

$$S = \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V dz dy,$$

on prendra d'abord la dérivée totale de V, en conservant les signes $\Big| \int \int$; on ajoutera à ce premier terme deux autres termes que l'on déduira de l'expression proposée en remplaçant tour à tour chaque différentielle dz, dy par la dérivée totale de z ou de y relative à $\varkappa$, et changeant en même temps l'intégration relative à z ou y en substitu-

tion double correspondante. On aura donc

$$\frac{dS}{d\varkappa} = \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{dV}{d\varkappa}\right] dz dy + \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} V \left[\frac{dz}{d\varkappa}\right] dy$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V \left[\frac{dy}{d\varkappa}\right] dz.$$

Comme dans la formation des dérivées totales, entourées des accolades [ ], il faut toujours regarder chacune des variables de substitution comme une fonction de toutes celles qui la précèdent et de $\varkappa$, les valeurs de ces dérivées seront :

$$\left[\frac{dV}{d\varkappa}\right] = \frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa},$$

$$\left[\frac{dz}{d\varkappa}\right] = \frac{dz}{d\varkappa} + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa},$$

$$\left[\frac{dy}{d\varkappa}\right] = \frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}.$$

On arrive ainsi au résultat suivant, qu'on aurait pu déduire immédiatement de la règle générale :

$$\frac{d}{d\varkappa}\Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V dz dy$$

$$= \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right) dz dy$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} V \left(\frac{dz}{d\varkappa} + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right) dy$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V \left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right) dz.$$

A la vérité ce n'est là qu'une formule abrégée et symbolique ; mais il suffit de décomposer les substitutions doubles en substitutions simples correspondantes, et de

remplacer les dérivées symboliques des variables x, y, z, par les dérivées réelles des limites $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, qu'elles représentent, pour arriver à la valeur définitive de la dérivée cherchée :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V dzdy \\
&= \int^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dx}\frac{dx_2}{dx}\right)dzdy \\
&- \int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dx}\frac{dx_1}{dx}\right)dzdy \\
&+ \int^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_2} V\left(\frac{dz_2}{dx}+\frac{dz_2}{dx}\frac{dx_2}{dx}\right)dy \\
&- \int^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_1} V\left(\frac{dz_1}{dx}+\frac{dz_1}{dx}\frac{dx_2}{dx}\right)dy \\
&- \int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_2} V\left(\frac{dz_2}{dx}+\frac{dz_2}{dx}\frac{dx_1}{dx}\right)dy \\
&+ \int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_1} V\left(\frac{dz_1}{dx}+\frac{dz_1}{dx}\frac{dx_1}{dx}\right)dy \\
&+ \int^{x_2}\int^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\left(\frac{dy_2}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dx_2}{dx}\right)dz \\
&- \int^{x_2}\int^{y_1}\int_{z_1}^{z_2} V\left(\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_1}{dx}\frac{dx_2}{dx}\right)dz \\
&- \int^{x_1}\int^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\left(\frac{dy_2}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dx_1}{dx}\right)dz \\
&+ \int^{x_1}\int^{y_1}\int_{z_1}^{z_2} V\left(\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_1}{dx}\frac{dx_1}{dx}\right)dz.
\end{aligned}
$$

Considérons encore l'expression définie

$$S = \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V dz,$$

affectée à la fois de signes de substitution simple et double ; sa dérivée relative à $\varkappa$ aura pour valeur symbolique

$$\frac{dS}{d\varkappa} = \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{dV}{d\varkappa} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varkappa} + \frac{dV}{dy}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right) \right\} dz$$

$$+ \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} V \left\{ \frac{dz}{d\varkappa} + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varkappa} + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varkappa}\right) \right\}.$$

Le premier terme renferme la dérivée totale de V prise en regardant chacune des trois variables $\varkappa$, x, y comme fonction de celles qui la précèdent, tandis que pour la dérivée totale de z, contenue dans le second terme, cette dépendance rétrograde s'étend aux quatre variables $\varkappa$, x, y, z.

Cette équation symbolique deviendra une équation réelle lorsque, après avoir décomposé les substitutions doubles en substitutions simples, on aura remplacé les dérivées symboliques des variables x, y, z par les dérivées réelles qu'elles représentent, ainsi que nous l'avons fait dans le premier exemple.

Ces deux exemples suffisent à éclairer l'application de la règle générale du n° 14, et à montrer combien les formules se simplifient par l'emploi des notations admises.

18. *Intégrations par parties des expressions définies.* — Il arrive souvent qu'une expression définie renferme en facteur sous les signes de substitution et d'intégration la dérivée ω d'une fonction inconnue prise par rapport à l'une des variables d'intégration, et qu'il faille la transformer de telle sorte que cette même fonction ne

soit plus différentiée que par rapport aux variables de substitution. Afin de mieux expliquer comment on doit s'y prendre pour effectuer cette transformation, considérons l'expression définie mixte

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dz\,dx,$$

renfermant la dérivée de ω relative à la variable d'intégration x. Si l'on différentie par rapport à x, considérée comme paramètre variable, l'expression

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\omega \,.\, dz,$$

c'est-à-dire ce qui dans l'expression donnée est affecté d'intégration relative à x, mais où ω prend la place de $\frac{d\omega}{dx}$, on aura, en vertu de la règle générale du n° 14,

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\omega\,dz = \int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dx}\right]dz + \int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{R}\omega\left[\frac{dz}{dx}\right].$$

Les dérivées totales, entourées d'accolades, devant être formées, la première comme si des deux variables x, y, la seconde comme si des trois variables x, y, z, chacune était fonction de celle ou de toutes celles qui la précèdent, auront pour valeurs effectives

$$\left[\frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dx}\right] = \frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dx} + \frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dy}\frac{dy}{dx} = \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\omega + \frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\left[\frac{dz}{dx}\right] = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on introduit ces valeurs dans l'équation précédente, et qu'on intègre ensuite les deux membres entre les limites x_1 et x_2, après les avoir multipliés par dx, on

obtiendra

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,dz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dzdx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\omega + \frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right) dzdx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right) dx,$$

et en transposant

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dzdx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,dz$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\omega + \frac{d\,.\,\mathrm{R}\omega}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right) dzdx.$$

Cette nouvelle équation réalise la transformation cherchée, puisque son premier membre est précisément l'expression donnée, et que dans le terme du second membre où entre encore la dérivée de ω, cette dérivée est prise par rapport à y, qui dans ce terme est une variable de substitution.

Prenons pour second exemple l'expression

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,dzdy.$$

En différentiant par rapport à y l'intégrale $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\omega dz$, nous aurons

$$\frac{d}{dy}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,dz = \int_{z_1}^{z_2}\left(\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\omega\right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,\frac{dz}{dy}.$$

Multipliant par dy, intégrant entre les limites y_1 et y_2,

et transposant, il vient

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,dz\,dy = \Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,dz - \int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\omega\,\frac{dz}{dy}\,dy$$
$$- \int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\omega\,dz\,dy,$$

et ce sera la transformation cherchée, quand on aura introduit dans les deux membres le signe de substitution $\Big|_{x_1}^{x_2}$.

19. Cette même marche qui conduit au but dans tous les cas, se traduit dans la règle suivante :

Lorqu'une expression définie contient en facteur la dérivée d'une fonction ω relative à une variable d'intégration x, pour la ramener à une forme où les dérivées de ω soient toutes relatives à des variables de substitution, 1° différentiez par rapport à x l'expression entière soumise à l'intégration relative à cette variable, après y avoir remplacé $\frac{d\omega}{dx}$ par ω; 2° intégrez le résultat par rapport à x entre les limites x_1 et x_2. L'équation à laquelle vous parviendrez ainsi, donnera, par une simple transposition des termes, la transformation cherchée.

En effet, la différentiation relative à x, premier temps de l'opération, donne une équation dans laquelle tous les termes contiennent, sous les signes $\int$ et $|$, ω en facteur, à l'exception du premier terme du second membre, qui renferme la dérivée totale relative à x d'un certain produit $\mathrm{R}\omega$; or cette dérivée totale développée se composera d'un premier terme $\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}$ et d'une série de termes ne renfermant plus que des dérivées de ω relatives aux variables de substitution. L'intégration relative à x

entre les limites x_1 et x_2, second temps de l'opération, ramènera le terme en $R\frac{d\omega}{dx}$ à l'expression définie donnée, en laissant dans tous les autres termes des dérivées uniquement relatives aux variables de substitution; donc une simple transposition des termes donnera définitivement la transformation cherchée.

20. Comme application particulière, mais très-importante de cette règle, proposons-nous de transformer l'intégrale multiple

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots R\frac{d\omega}{dx}\ldots dzdydx,$$

de telle sorte que la fonction ω n'y soit plus différentiée par rapport à une variable d'intégration. La dérivée relative à x de l'expression $\int\int\ldots R\omega\ldots dzdy$, est en vertu de la formule (8), p. 21,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots R\omega\ldots dzdy\\
&=\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots\left(R\frac{d\omega}{dx}+\frac{dR}{dx}\omega\right)\ldots dzdy\\
&+\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots R\omega\frac{dy}{dx}\ldots dz\\
&+\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\ldots R\omega\frac{dz}{dx}\ldots dy\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Intégrant les deux membres par rapport à x entre les limites x_1 et x_2, après les avoir multipliés par dx, et transposant, on obtient la formule de transformation gé-

nérale des intégrales multiples :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\cdots dz\,dy\,dx \\
&= \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots \mathrm{R}\omega\ldots dz\,dy \\
&- \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots \mathrm{R}\,\omega\,\frac{dy}{dx}\cdots dz\,dx \\
&- \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\cdots \mathrm{R}\,\omega\,\frac{dz}{dx}\cdots dy\,dx \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\omega\ldots\ dz\,dy\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Ces transformations sont ce qu'on pourrait appeler *l'intégration par parties des expressions définies*, en raison de l'analogie qu'elles ont avec le procédé connu sous ce nom dans la théorie des intégrales simples, procédé qui n'est au fond qu'un cas très-particulier des transformations dont il vient d'être question.

21. Nous croyons utile, en terminant cette leçon, de réunir dans un même tableau les formules de réduction, au moyen de l'intégration par parties, de toutes les expressions définies qui renferment au plus trois variables principales. Pour simplifier, nous dégageons de leurs limites les signes d'intégration et de substitution toujours doubles; mais chacun les rétablira sans peine, en se rappelant que les limites qui doivent affecter un quelconque de ces signes sont celles de la variable qui lui correspond dans l'ordre des lettres, c'est-à-dire de la première variable pour le premier signe, de la seconde variable pour le second, etc.

(a). *Expression définie relative à la variable x :*

$$\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dx = \Big|\,\mathrm{R}\,\omega - \int \frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\,\omega\,dx.$$

(b). *Expressions définies relatives aux variables x, y:*

$$\int\Big|\,\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dx = \Big|\Big|\,\mathrm{R}\,\omega - \int\Big|\left\{\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}+\frac{d\,\mathrm{R}}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)\omega + \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right\}dx,$$

$$\int\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dydx = \Big|\int \mathrm{R}\,\omega\,dy - \int\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\,\frac{dy}{dx}\,dx - \int\int\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\,\omega\,dydx.$$

(c). *Expressions définies relatives aux variables x, y, z :*

$$\int\Big|\Big|\,\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dx = \Big|\Big|\Big|\,\mathrm{R}\,\omega$$
$$- \int\Big|\Big|\left\{\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}+\frac{d\,\mathrm{R}}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d\,\mathrm{R}}{dz}\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)\right\}\omega\,dx$$
$$- \int\Big|\Big|\,\mathrm{R}\left\{\frac{d\omega}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dz}\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)\right\}dx,$$

$$\int\int\Big|\,\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dydx = \Big|\int\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\,dy - \int\Big|\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
$$- \int\int\Big|\left\{\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}+\frac{d\,\mathrm{R}}{dz}\,\frac{dz}{dx}\right)\omega + \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dz}\,\frac{dz}{dx}\right\}dydx,$$

$$\int\Big|\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dzdx = \Big|\Big|\int \mathrm{R}\,\omega\,dz - \int\Big|\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)dx$$
$$- \int\Big|\int\left\{\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}+\frac{d\,\mathrm{R}}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)\omega + \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right\}dzdx,$$

$$\int\int\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dx}\,dzdydx = \Big|\int\int \mathrm{R}\,\omega\,dzdy - \int\Big|\int \mathrm{R}\,\omega\,\frac{dy}{dx}\,dzdx$$
$$- \int\int\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\,\frac{dz}{dx}\,dydx$$
$$- \int\int\int\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\,\omega\,dzdydx.$$

(d). *Expression définie relative à la variable y :*

$$\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,dy = \Big|\,\mathrm{R}\,\omega - \int \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\omega\,dy.$$

(e). *Expressions définies relatives aux variables y, z:*

$$\int\Big|\,\mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,dy = \Big|\,\Big|\,\mathrm{R}\,\omega - \int\Big|\left\{\left(\frac{d\mathrm{R}}{dy} + \frac{d\mathrm{R}}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right)\omega + \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right\}dy,$$

$$\int\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dy}\,dz\,dy = \Big|\int \mathrm{R}\,\omega\,dz - \int\Big|\,\mathrm{R}\,\omega\,\frac{dz}{dy}\,dy - \int\int\frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\omega\,dz\,dy.$$

(f). *Expression définie relative à la variable z :*

$$\int \mathrm{R}\,\frac{d\omega}{dz}\,dz = \Big|\,\mathrm{R}\,\omega - \int \frac{d\mathrm{R}}{dz}\,\omega\,dz.$$

TROISIÈME LEÇON.

Définition de la variation d'une fonction. — Variation d'une fonction composée. — Variation d'une intégrale multiple. — Transformation de la variation d'une intégrale multiple. — Formule de M. Ostrogradsky. — Variation d'une expression définie quelconque.

22. Dans le calcul des variations, on considère certaines fonctions inconnues comme variables de forme, de sorte qu'elles puissent passer successivement d'une valeur à une autre, sans que les variables $x, y, z, \ldots$ dont elles dépendent, changent elles-mêmes de valeur. Il faut d'ailleurs que ce passage d'une forme à une autre, qu'on pourrait appeler *déformation*, se fasse d'une manière continue, et qu'on puisse, en partant d'une fonction donnée, arriver à une autre fonction quelconque.

Pour réaliser d'une manière nette et précise un semblable changement de forme, le mieux est d'introduire une nouvelle variable indépendante $\varkappa$, que nous appelons *paramètre*, afin de la distinguer des variables $x, y, z, \ldots$, qui conservent le nom de *variables principales*. On regarde alors la fonction proposée u qui doit changer de forme, comme une valeur particulière d'une fonction plus générale U, laquelle, en plus des variables principales $x, y, z, \ldots$, renferme le paramètre indéterminé $\varkappa$, de sorte qu'elle se réduise à u pour une certaine valeur $\varkappa_0$ de $\varkappa$, et qu'elle puisse en outre représenter une infinité d'autres fonctions de $x, y, z, \ldots$, suivant les différentes valeurs qu'on attribue successivement au paramètre $\varkappa$. Considérée dans toute sa généralité, cette fonction peut donc être différentiée par rapport à $\varkappa$; et les valeurs que prennent, lorsqu'on y fait $\varkappa = \varkappa_0$, les dérivées par-

tielles

$$\frac{dU}{d\varkappa}, \quad \frac{d^2U}{d\varkappa^2}, \quad \frac{d^3U}{d\varkappa^3}, \ldots,$$

servent à caractériser le changement continu de forme de la fonction u; nous les appellerons *variations de u du premier, du second, du troisième ordre, etc.*, ou simplement *première, seconde, troisième, etc., variation de u*, et nous les désignerons respectivement par

$$\delta u, \quad \delta^2 u, \quad \delta^3 u, \ldots.$$

Ainsi δu, ou la variation du premier ordre de la fonction u, est précisément la valeur que prend pour $\varkappa = \varkappa_0$ la dérivée partielle $\frac{dU}{d\varkappa}$; de même la variation du second ordre $\delta^2 u$ est la valeur de la dérivée $\frac{d^2U}{d\varkappa^2}$ pour $\varkappa = \varkappa_0$, et ainsi des autres. Ces variations doivent être regardées comme de nouvelles fonctions, entièrement arbitraires, des variables $x, y, z, \ldots$, toutes les fois que le changement de forme de la fonction u n'est assujetti, par la nature du problème, à aucune restriction particulière. En effet, on peut toujours assigner à U une forme telle, que ses dérivées partielles relatives à $\varkappa$, jusqu'à un ordre quelconque n, prennent pour $\varkappa = \varkappa_0$ telles valeurs qu'on voudra. Il suffit pour cela de définir U par l'équation suivante :

$$U = u + \frac{\varkappa - \varkappa_0}{1}\varphi(x, y, z, \ldots) + \frac{(\varkappa - \varkappa_0)^2}{1.2}\chi(x, y, z, \ldots) + \ldots$$
$$+ \frac{(\varkappa - \varkappa_0)^n}{1.2.3\ldots n}[\psi(x, y, z, \ldots) + F(\varkappa, x, y, z, \ldots)],$$

dans laquelle $F(\varkappa, x, y, z, \ldots)$ est choisie de manière à s'évanouir pour $\varkappa = \varkappa_0$, et $\varphi, \chi, \ldots, \psi$ sont des fonctions quelconques. Nous admettons toutefois que ces dernières fonctions, et par suite les variations de u des différents

ordres, restent finies et continues entre les limites des variables que l'on considère.

23. La fonction u venant à changer de forme, ses dérivées prises par rapport aux variables x, y, z,... deviennent de nouvelles fonctions, susceptibles à leur tour de changer de formes, et qu'on peut identifier avec les valeurs particulières que prennent pour $\varkappa = \varkappa_0$ les dérivées correspondantes de la fonction plus générale U. On trouvera donc la variation d'une dérivée quelconque de u, en différentiant par rapport à $\varkappa$ la dérivée correspondante de U, et faisant ensuite $\varkappa = \varkappa_0$. Or, comme toutes les variables $\varkappa$, x, y, z,... sont indépendantes entre elles, le rang dans lequel on effectue les différentiations successives reste arbitraire ; il en résulte qu'on peut intervertir à volonté l'ordre des opérations indiquées par les caractéristiques d et δ, de sorte qu'on a, par exemple,

$$\delta \frac{du}{dx} = \frac{d\delta u}{dx}, \quad \delta \frac{du}{dy} = \frac{d\delta u}{dy}, \quad \delta \frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 \delta u}{dx dy},$$

et, en général,

$$\delta^n \frac{d^{p+q+r+\cdots} u}{dx^p dy^q dz^r \cdots} = \frac{d^{p+q+r+\cdots} \delta^n u}{dx^p dy^q dz^r \cdots}.$$

24. Considérons maintenant une fonction composée V qui renferme, d'une manière connue, plusieurs fonctions u, v, w,..., avec leurs dérivées successives, et concevons que ces dernières fonctions contiennent toutes un même paramètre arbitraire $\varkappa$, de manière qu'elles changent de forme lorsque ce paramètre change de valeur. Cela posé, V contiendra implicitement ce même paramètre $\varkappa$, ou sera fonction de $\varkappa$, et l'on trouvera sa variation en prenant sa dérivée partielle par rapport à $\varkappa$, d'après la règle ordinaire de la différentiation des fonctions composées et faisant ensuite $\varkappa = \varkappa_0$, ce qui re-

vient à remplacer les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ... par les variations δu, δv, ... Supposons, pour fixer les idées, que V contienne seulement deux variables principales x, y, et deux fonctions u, v de ces variables avec leurs dérivées successives; désignons respectivement par L, M, N, P, Q, R, S, T, ..., N′, P′, Q′, R′, S′, T′, les dérivées partielles de V relatives à x, y, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, ..., $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$, $\frac{d^2v}{dxdy}$, $\frac{d^2v}{dy^2}$, ..., de manière que sa différentielle totale soit

$$dV = L\,dx + M\,dy$$
$$+ N\,du + P\,d\frac{du}{dx} + Q\,d\frac{du}{dy} + R\,d\frac{d^2u}{dx^2} + S\,d\frac{d^2u}{dxdy} + T\,d\frac{d^2u}{dy^2} + \ldots$$
$$+ N'dv + P'd\frac{dv}{dx} + Q'd\frac{dv}{dy} + R'd\frac{d^2v}{dx^2} + S'd\frac{d^2v}{dxdy} + T'd\frac{d^2v}{dy^2} + \ldots$$

la variation de V du premier ordre sera évidemment

$$\delta V =$$
$$N\delta u + P\delta\frac{du}{dx} + Q\delta\frac{du}{dy} + R\delta\frac{d^2u}{dx^2} + S\delta\frac{d^2u}{dxdy} + T\delta\frac{d^2u}{dy^2} + \ldots$$
$$+ N'\delta v + P'\delta\frac{dv}{dx} + Q'\delta\frac{dv}{dy} + R'\delta\frac{d^2v}{dx^2} + S'\delta\frac{d^2v}{dxdy} + T'\delta\frac{d^2v}{dy^2} + \ldots$$

ou bien, en transposant les signes d et δ,

$$\delta V =$$
$$N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d\delta u}{dy} + R\frac{d^2\delta u}{dx^2} + S\frac{d^2\delta u}{dxdy} + T\frac{d^2\delta u}{dy^2} + \ldots$$
$$+ N'\delta v + P'\frac{d\delta v}{dx} + Q'\frac{d\delta v}{dy} + R'\frac{d^2\delta v}{dx^2} + S'\frac{d^2\delta v}{dxdy} + T'\frac{d^2\delta v}{dy^2} + \ldots$$

En prenant les dérivées successives, on trouverait sans difficulté les variations des ordres supérieurs ; il est donc inutile de s'y arrêter.

25. Considérons encore l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots \mathrm{V}\ldots dz dy dx,$$

dans laquelle les limites de chacune des variables $x, y, z, \ldots$ sont des fonctions des variables qui la précèdent, dans laquelle, en outre, ces limites, ainsi que les fonctions inconnues $u, v, w, \ldots$, renfermées dans l'expression V, se déforment avec les valeurs du paramètre $\varkappa$, en donnant naissance aux variations

$$\delta x_1,\quad \delta x_2,\quad \delta y_1,\quad \delta y_2,\quad \delta z_1,\quad \delta z_2,\ldots,\quad \delta u,\quad \delta v,\quad \delta w,\ldots.$$

L'intégrale proposée étant elle-même fonction de ce paramètre, pour obtenir sa variation, ou dérivée par rapport à $\varkappa$, il suffira de remplacer dans la formule (8), p. 21, les dérivées relatives à $\varkappa$ par des variations correspondantes. Pour abréger, et par une convention analogue à celle du n° 7, nous ferons usage, en les faisant précéder d'un signe de substitution, des symboles

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\ldots,\quad \delta t,$$

qui en eux-mêmes ne signifient rien, puisque les variables principales $x, y, z, \ldots, t$ sont indépendantes de $\varkappa$, pour désigner les variations des limites inférieures ou supérieures des variables de même nom ; en d'autres termes, $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, sont des fonctions quelconques, la première de x, la seconde de x, y, la troisième de x, y, z, etc., assujetties à la seule condition que leurs valeurs limites coïncident avec les variations des limites des variables principales. Cette convention ou définition

admise, on aura

$$\int^{x_1} \delta x = \delta x_1, \quad \int^{x_2} \delta x = \delta x_2, \quad \int^{y_1} \delta y = \delta y_1, \quad \int^{y_2} \delta y = \delta y_2, \ldots,$$

et aussi, par exemple,

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\delta x . dy = \int^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\delta x_2 . dy - \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\delta x_1 . dy,$$

en faisant remarquer que la signification d'une variation symbolique δx, comme celle d'une dérivée symbolique $\frac{dx}{dx}$, est suffisamment déterminée par le signe de substitution qui précède, alors même qu'il en serait séparé par d'autres signes de substitution ou d'intégration, ou par un facteur quelconque.

Cela posé, la variation d'une intégrale multiple sera donnée par la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}.dt \ldots dz dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathrm{V}.dt \ldots dz dy dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int^{t_2}_{t_1} \mathrm{V}\,\delta t \ldots dz dy dx \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int^{z_2}_{z_1} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta z . dt \ldots dy dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int^{y_2}_{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta y . dt \ldots dz dx \\ &+ \int^{x_2}_{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta x . dt \ldots dz dy. \end{aligned} \right.$$

26. Cette formule se simplifie considérablement dans

certains cas que l'on rencontre très-souvent dans les applications. Supposons d'abord que les valeurs y_1 et y_2 de y correspondantes aux valeurs limites de x deviennent égales entre elles, de sorte qu'on ait

$$\int^{x_1} y_1 = \int^{x_1} y_2, \qquad \int^{x_2} y_1 = \int^{x_2} y_2;$$

le dernier terme de la formule sera identiquement nul et disparaîtra, parce que, dans le sens des y, son champ est nul. En effet, si l'on fait, pour abréger,

$$y'_1 = \int^{x_1} y_1, \qquad y''_1 = \int^{x_2} y_1,$$

$$y'_2 = \int^{x_1} y_2, \qquad y''_2 = \int^{x_2} y_2,$$

ce terme prendra (n° 6) la forme

$$\int_{y''_1}^{y''_2} \int^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta x_2 . dt \ldots dz dy$$
$$- \int_{y'_1}^{y'_2} \int^{x_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta x_1 . dt \ldots dz dy;$$

et les deux termes de cette transformée s'évanouissent évidemment, parce que dans l'hypothèse de $y'_1 = y'_2$, $y''_1 = y''_2$, les deux limites de la dernière intégration sont les mêmes. Ce cas se présente en particulier lorsque l'intégrale est limitée dans le sens des variables x, y par une courbe fermée et continue. L'ordonnée y étant, en effet, nécessairement tangente à la courbe dans les deux points correspondants aux valeurs extrêmes de l'abscisse x, les deux limites y_1 et y_2 de y en ces points sont identiques et se confondent.

De même, si les valeurs de z_1 et z_2 deviennent égales entre elles pour $y = y_1$ et $y = y_2$, l'avant-dernier terme

de la formule (1) se réduira à zéro, parce que, en vertu des égalités

$$\int^{y_1} z_1 = \int^{y_1} z_2, \qquad \int^{y_2} z_1 = \int^{y_2} z_2,$$

son champ est nul dans le sens de z. C'est ce qui a lieu lorsque l'intégrale est limitée dans l'espace, ou suivant les trois variables x, y, z, par une surface continue. Car de même que l'ordonnée y devient tangente à la courbe limite, comprise dans le plan xy, aux points déterminés par les valeurs extrêmes de x, l'ordonnée z devient tangente à la surface aux points qui correspondent aux valeurs limites de y; et cette circonstance fait disparaître à la fois les deux derniers termes de la formule (1).

Enfin, si cette condition d'égalité ou de coïncidence des deux limites d'une variable, correspondantes aux valeurs extrêmes de la variable qui précède immédiatement, s'étend à toutes les variables principales x, y, $z, \ldots, s$, t, c'est-à-dire si l'on a $y_1 = y_2$ pour $x = x_1$ et $x = x_2$; $z_1 = z_2$ pour $y = y_1$ et $y = y_2$, etc., et enfin $t_1 = t_2$ pour $s = s_1$ et $s = s_2$, tous les termes, à l'exception des deux premiers, disparaîtront de la formule (1), et l'on aura simplement

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}.dt \ldots dzdydx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathrm{V}.dt \ldots dzdydx \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \Big|_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}\,\delta t \ldots dzdydx.
\end{aligned}$$

C'est ce qui arrive en particulier lorsque l'intégrale multiple s'étend à toutes les valeurs de x, y $z, \ldots, t$ qui

vérifient l'inégalité

$$L < 0,$$

L étant une fonction algébrique entière et de degré pair relativement à toutes les variables. Dans ce cas, en effet, les valeurs extrêmes des variables ou les limites des intégrations successives se déterminent de la manière suivante :

1° La première intégration relative à t doit s'étendre à toutes les valeurs de cette variable qui, pour un système quelconque de valeurs de x, y, z, ..., s, satisfont à l'inégalité $L < 0$. Or comme L, fonction finie et continue de la variable t, ne peut cesser d'être plus petite que zéro, sans devenir égale à zéro, les valeurs extrêmes de t doivent évidemment vérifier l'équation $L = 0$, qui donnera ainsi les limites t_1 et t_2 exprimées en fonctions des variables x, y, z, ..., s, ces premières variables restant encore indéterminées, et les intégrations suivantes devant s'étendre à tous les systèmes de valeurs qu'on peut leur assigner sans que les limites de t, tirées de l'équation $L = 0$, cessent d'être réelles. Mais comme ces deux limites, racines d'une même équation algébrique, ne peuvent évidemment passer du réel à l'imaginaire sans devenir égales entre elles, il en résulte déjà qu'on aura $t_1 = t_2$ toutes les fois que l'une quelconque des variables précédentes x, y, z, ..., s atteindra sa valeur limite. C'est au reste ce que nous allons constater directement pour la variable s.

2° La seconde intégration relative à s doit s'étendre à toutes les valeurs de s qui, pour un système quelconque de valeurs des variables précédentes x, y, z, ..., vérifient l'équation $L = 0$; les valeurs limites s_1 et s_2 seront donc la plus petite et la plus grande des valeurs que la variable s peut recevoir dans cette équation, lorsqu'on y

fait varier simultanément s et t. Pour trouver ce minimum ou ce maximum, il faut, comme on le sait, différentier l'équation $L = o$ relativement aux variables s et t, et faire ensuite $\frac{ds}{dt} = o$, ce qui entraînera $\frac{dL}{dt} = o$, équation qui, jointe à la précédente $L = o$, déterminera les valeurs limites s_1 et s_2 en fonctions de $x, y, z, \ldots, r$, pourvu qu'on ait d'abord éliminé t entre ces deux équations. Or la valeur de t qui vérifie à la fois les deux équations

$$L = o, \quad \frac{dL}{dt} = o,$$

est nécessairement une racine double de la première équation $L = o$; il en résulte que cette équation, qui donne dans tous les cas les limites de t, donne dans ce cas particulier ou lorsque s atteint ses valeurs extrêmes s_1, s_2, sous forme de racine double, deux valeurs égales $t_1 = t_2$, ainsi que nous l'avions prévu.

Soit $L' = o$, l'équation résultant de l'élimination de t entre les équations $L = o$ et $\frac{dL}{dt} = o$, et qui doit fournir les limites de s exprimées en fonctions des variables précédentes $x, y, z, \ldots, r$, ces variables restant encore indéterminées et les intégrations suivantes devant s'étendre à tous les systèmes de valeurs qu'on peut leur assigner sans que les limites de s, tirées de l'équation $L' = o$, cessent d'être réelles. Comme s_1, s_2 ne peuvent pas passer du réel à l'imaginaire sans devenir égales entre elles, on en conclura que s_1 deviendra égale à s_2 chaque fois que l'une quelconque des variables précédentes atteindra sa valeur limite. Cette conclusion sera du reste vérifiée en tant qu'il s'agit des valeurs extrêmes de r par les considérations suivantes.

3° Les limites r_1 et r_2 de r, variable de la troisième in-

tégration, sont de même la plus petite et la plus grande des valeurs de cette variable qui satisfassent à l'équation $L' = 0$, lorsqu'on y fait varier simultanément r et s, les variables précédentes $x, y, z, \ldots$, restant quelconques; r_1 et r_2 seront donc déterminées par les deux équations

$$L' = 0, \quad \frac{dL'}{ds} = 0,$$

ou par l'équation $L'' = 0$, que l'on obtiendra en éliminant s. Mais la valeur de s qui vérifie à la fois les deux équations

$$L' = 0, \quad \frac{dL'}{ds} = 0,$$

est nécessairement une racine double de la première $L' = 0$; donc les valeurs de s_1 et s_2, qui correspondent aux valeurs extrêmes de r, sont égales entre elles.

En continuant de la même manière, on verra que les deux limites d'une variable quelconque se confondent ou deviennent égales entre elles, chaque fois que l'une quelconque des variables qui précèdent, atteint sa valeur extrême.

Dans tout ce qui précède nous avons admis implicitement que chacune des équations $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0, \ldots$, n'avait qu'une couple de racines réelles $t_1, t_2, s_1, s_2, r_1, r_2, \ldots$ S'il en était autrement et qu'il y eût pour s, par exemple, quatre racines réelles s_1, s_2, s_3, s_4, que nous supposerons rangées par ordre de grandeur, on ferait l'intégration relative à s en deux temps, d'abord de s_1 à s_2, puis de s_3 à s_4, c'est-à-dire qu'on partagerait l'intégrale en deux autres; pour chacune de ces dernières intégrales il n'y aurait plus que deux valeurs limites de s et l'on prouverait que ces valeurs deviennent égales, lorsque la variable précédente r atteint ses valeurs extrêmes.

Dans le cas particulier où le champ de l'intégrale ne

doit subir aucune déformation, les limites des variables ne devront plus contenir $\varkappa$, leurs variations seront nécessairement nulles, et la formule (1) se réduira à son premier terme

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}.dt\ldots dzdydx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathrm{V}.dt\ldots dzdydx.$$

27. Les variations des intégrales multiples doivent subir quelquefois des transformations qu'il importe d'indiquer. Lorsque V renferme la dérivée d'une fonction inconnue u, sa variation δV renferme, comme on l'a vu (n° 24), la dérivée de la variation δu relative aux mêmes variables; il pourra donc arriver que, dans le développement de la variation d'une intégrale, δu soit différentiée par rapport à une ou plusieurs variables d'intégration. Nous allons montrer comment, par une suite d'intégrations par parties, on peut faire cesser cette anomalie, et arriver à des formules dont on puisse se servir immédiatement dans les applications du calcul des variations.

Soit

$$\theta = \frac{d^{l+m+n+\cdots} u}{dx^l dy^m dz^n \ldots}$$

une dérivée de u contenue dans l'expression V, cette dérivée amènera dans la variation de V le terme

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\theta} \frac{d^{l+m+n+\cdots} \delta u}{dx^l dy^m dz^n \ldots},$$

et dans la variation de l'intégrale multiple (1), p. 45, le terme

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \frac{d\mathrm{V}}{d\theta} \frac{d^{l+m+n+\cdots} \delta u}{dx^l dy^m dz^n \ldots} \cdots dzdydx,$$

dans lequel la dérivée de δu est prise par rapport à des

variables d'intégration. Pour le transformer, posons d'abord

$$R = \frac{dV}{d\theta}, \quad \omega = \frac{d^{l-1+m+n+\dots}\delta u}{dx^{l-1}dy^m dz^n \dots},$$

il deviendra

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \dots R \frac{d\omega}{dx} \dots dz dy dx.$$

En appliquant le procédé d'intégration par parties, exposé n° 19, on développera cette intégrale en une suite de termes dans lesquels les dérivées de ω ne seront plus prises par rapport à des variables d'intégration. Lorsque dans ces termes on remettra pour ω sa valeur, toutes les dérivées de δu prises par rapport à x, et qui devront subir une intégration relative à cette variable, seront au plus de l'ordre $l-1$, tandis que les dérivées de δu relatives à $y, z, \dots$, sur lesquelles porteront des intégrations relatives à ces mêmes variables, seront au plus des ordres $m, n, \dots$. Une seconde transformation semblable abaissera à l'ordre $l-2$ les dérivées de δu prises et intégrées par rapport à x, sans élever les ordres $m, n, \dots$, des dérivées prises et intégrées relativement à $y, z, \dots$. En procédant ainsi pas à pas, en faisant pour les autres variables de dérivation à la fois et d'intégration ce que l'on a fait pour x, en étendant aux dérivées des autres variations $\delta v, \delta w, \dots$, les réductions que l'on a fait subir aux dérivées de δu, on arrivera enfin à l'expression réduite et définitive de la variation de l'intégrale proposée.

28. Il suffira d'un exemple pour montrer l'application de ces principes. Prenons l'intégrale triple

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} R \frac{d^3\delta u}{dx dy dz} dz dy dx,$$

et proposons-nous de la transformer de manière que δu

ne soit plus différentiée et intégrée par rapport à la même variable. En appliquant les formules du n° 21, et effectuant d'abord la réduction relative à x, on trouve

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d^3\delta u}{dxdydz}\,dzdydx$$

$$=\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d^2\delta u}{dy\,dz}\,dzdy$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2\delta u}{dy\,dz}\,dzdx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2\delta u}{dydz}\,dydx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\frac{d^2\delta u}{dydz}\,dzdydx.$$

Dans tous les termes, à l'exception du second, les dérivées de δu sont encore prises et intégrées relativement à y, mais une nouvelle transformation donne

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d^2\delta u}{dydz}\,dzdy = \Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{d\delta u}{dz}\,dz$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d\delta u}{dz}\,dy$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\frac{d\delta u}{dz}\,dzdy,$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2\delta u}{dydz}\,dy = \Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d\delta u}{dz}$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left\{\left(\frac{d\mathrm{R}}{dy}+\frac{d\mathrm{R}}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right)\frac{dz}{dx}+\mathrm{R}\,\frac{d^2z}{dxdy}\right\}\frac{d\delta u}{dz}\,dy$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \mathrm{R}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d^2\delta u}{dz^2}\,dy,$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\frac{d^2\delta u}{dydz}dzdy = \Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\frac{d\delta u}{dz}dz$$
$$-\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d\delta u}{dz}dy$$
$$-\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dxdy}\frac{d\delta u}{dz}dzdy;$$

substituant ces valeurs et appliquant de nouveau l'intégration par parties aux termes qui contiennent encore des dérivées de δu prises et intégrées relativement à z, on trouve définitivement

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{R}\frac{d^3\delta u}{dxdydz}dzdydx$$
$$= \Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\mathrm{R}\,\delta u - \Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d\,\mathrm{R}}{dz}\delta u.dz$$
$$-\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dy}\delta u + \mathrm{R}\frac{dz}{dy}\frac{d\delta u}{dz}\right)dy$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\delta u + \mathrm{R}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta u}{dy} + \mathrm{R}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta u}{dz}\right)dx$$
$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dydz}\delta u.dzdy$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{dxdz}\delta u + \frac{d\,\mathrm{R}}{dz}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta u}{dy}\right)dzdx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left\{\frac{d^2\mathrm{R}}{dxdy}\delta u\right.$$
$$+\left(\frac{d\,\mathrm{R}}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{d\,\mathrm{R}}{dy}\frac{dz}{dx} + \frac{d\,\mathrm{R}}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \mathrm{R}\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{d\delta u}{dz}$$
$$\left.+\mathrm{R}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2\delta u}{dz^2}\right\}dydx$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d^3\mathrm{R}}{dxdydz}\delta u.dzdydx.$$

On ne devra pas oublier que les dérivées

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy},\quad \frac{d^2z}{dxdy},$$

sont des notations purement symboliques qui représentent, soit

$$\frac{dy_1}{dx},\quad \frac{dz_1}{dx},\quad \frac{dz_1}{dy},\quad \frac{d^2z_1}{dxdy},$$

soit

$$\frac{dy_2}{dx},\quad \frac{dz_2}{dx},\quad \frac{dz_2}{dy},\quad \frac{d^2z_2}{dxdy},$$

selon le signe de substitution qui les affecte.

29. La variation d'une intégrale multiple, (1) p. 45, prend une forme plus simple, lorsqu'on fait usage de certaines fonctions arbitraires $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z, \ldots, \mathrm{D}t$, que nous définissons de la manière suivante : $\mathrm{D}x$ est une fonction de x qui se réduit à ∂x_1 pour $x = x_1$, et à ∂x_2 pour $x = x_2$; $\mathrm{D}y$ est une fonction de x, y, qui devient $\partial y_1 + \frac{dy_1}{dx}\mathrm{D}x$ pour $y = y_1$, et $\partial y_2 + \frac{dy_2}{dx}\mathrm{D}x$ pour $y = y_2$; $\mathrm{D}z$ est de même une fonction de x, y, z, qui pour $z = z_1$ se réduit à $\partial z_1 + \frac{dz_1}{dx}\mathrm{D}x + \frac{dz_1}{dy}\mathrm{D}y$, et pour $z = z_2$ à $\partial z_2 + \frac{dz_2}{dx}\mathrm{D}x + \frac{dz_2}{dy}\mathrm{D}y$; et ainsi de suite. A ces restrictions près, les fonctions $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z, \ldots$, sont entièrement arbitraires (*). De la définition même de ces fonc-

(*) Ces mêmes fonctions se présentent à un autre point de vue comme des *variations* de x, y, z; c'est pourquoi nous les avons désignées par la lettre D.

tions il résulte

$$\delta x_1 = \Big| {}^{x_1} \mathrm{D}x, \qquad \delta x_2 = \Big| {}^{x_2} \mathrm{D}x,$$

$$\delta y_1 = \Big| {}^{y_1} \mathrm{D}y - \frac{dy_1}{dx}\mathrm{D}x, \qquad \delta y_2 = \Big| {}^{y_2} \mathrm{D}y - \frac{dy_2}{dx}\mathrm{D}x,$$

$$\delta z_1 = \Big| {}^{z_1} \mathrm{D}z - \frac{dz_1}{dx}\mathrm{D}x - \frac{dz_1}{dy}\mathrm{D}y, \qquad \delta z_2 = \Big| {}^{z_2} \mathrm{D}z - \frac{dz_2}{dx}\mathrm{D}x - \frac{dz_2}{dy}\mathrm{D}y,$$

. . . .

Introduites dans la formule (1) (n° 25), ces valeurs lui font prendre la forme suivante

$$\delta \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \ldots dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots \delta\mathrm{V} \ldots dz\,dy\,dx$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \ldots dz\,dy$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\left(\mathrm{D}y - \frac{dy}{dx}\mathrm{D}x\right) \ldots dz\,dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\left(\mathrm{D}z - \frac{dz}{dx}\mathrm{D}x - \frac{dz}{dy}\mathrm{D}y\right) \ldots dy\,dx$$

. . . . ,

dans laquelle $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots$ sont des dérivées symboliques ayant la même signification qu'auparavant. Cela posé, pour parvenir à la formule plus simple à laquelle nous avons fait allusion, il ne reste plus qu'à faire disparaître les signes de substitution ou à les remplacer par des

signes d'intégration, en suivant la marche que nous allons indiquer. On a d'abord généralement

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \mathrm{U} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{U}}{dx}\, dx,$$

et, par conséquent,

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \ldots dz\,dy$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \ldots dz\,dy.$$

Mais

$$\frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \ldots dz\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \frac{d(\mathrm{V}\,\mathrm{D}x)}{dx} \ldots dz\,dy$$
$$+ \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \frac{dy}{dx} \ldots dz$$
$$+ \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \frac{dz}{dx} \ldots dy$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

on aura donc, en substituant,

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}x \ldots dz\,dy$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \frac{d(\mathrm{V}\,\mathrm{D}x)}{dx} \ldots dz\,dy\,dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \frac{dy}{dx} \mathrm{D}x \ldots dz\,dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \frac{dz}{dx} \mathrm{D}x \ldots dy\,dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite,

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \ldots dz dy dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \left(\delta \mathrm{V} + \frac{d(\mathrm{V}\,\mathrm{D}x)}{dx} \right) \ldots dz dy dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}y \ldots dz dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \left(\mathrm{D}z - \frac{dz}{dy}\mathrm{D}y \right) \ldots dy dx$$

....

Le signe de substitution relatif à x a disparu; pour faire disparaître de même le signe de substitution relatif à y, multiplions les deux membres de l'équation

$$\frac{d}{dy} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}y \ldots dz = \int_{z_1}^{z_2} \ldots \frac{d(\mathrm{V}\,\mathrm{D}y)}{dy} \ldots dz$$

$$+ \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}y \frac{dz}{dy} \ldots$$

....

par $dydx$, et intégrons par rapport à y et x, entre les limites y_1, y_2, et x_1, x_2; il viendra

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V}\,\mathrm{D}y \ldots dz dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \frac{d(\mathrm{V}\,\mathrm{D}y)}{dy} \ldots dz dy dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots \mathrm{V} \frac{dz}{dy} \mathrm{D}y \ldots dy dx$$

....

Cette valeur substituée dans la variation de l'intégrale lui

fait prendre la forme

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots V \ldots dz dy dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \left(\delta V + \frac{d(VDx)}{dx} + \frac{d(VDy)}{dy} \right) \ldots dz dy dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \ldots VDz \ldots dy dx$$

. . . .

qui ne renferme plus de substitution relative à y. Une troisième transformation tout à fait semblable fera disparaître de même le signe de substitution relatif à z; et en procédant ainsi on obtiendra définitivement

$$(2) \qquad \delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots V \ldots dz dy dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \left(\delta V + \frac{d(VDx)}{dx} + \frac{d(VDy)}{dy} + \frac{d(VDz)}{dz} + \ldots \right) \ldots dz dy dx,$$

formule trouvée d'abord par M. Ostrogradsky (*). Quoique elle présente sous une forme très-simple et très-symétrique la variation complète d'une intégrale multiple, cette formule a l'inconvénient de renfermer les dérivées de plusieurs variations prises par rapport aux variables d'intégration. Avant de l'appliquer, il faudrait donc faire cesser cet inconvénient à l'aide de l'intégra-

---

(*) Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1860, t. L, p. 85, M. Lindelœf a donné de cette même formule une démonstration directe et très-simple, fondée sur un changement de variables indépendantes, mais qui par cela même ne convient qu'au cas particulier où le champ de l'intégrale est limité d'une manière continue dans le sens de toutes les variables.

tion par parties (n° 18); or si l'on commençait par réduire les dérivées de ..., Dz, Dy, Dx, ce serait précisément suivre une marche inverse de celle qui vient de conduire à la formule (2), et revenir à l'équation (1) d'où l'on est parti. Celle-ci, par conséquent, est plus directement applicable, et c'est la seule dont nous ferons usage désormais.

30. La variation d'une expression définie quelconque S s'obtient exactement de la même manière que celle d'une intégrale définie. Appliquant la règle du n° 14, on prendra d'abord la dérivée de S par rapport à $\varkappa$, en supposant ce paramètre contenu dans toutes les fonctions variables de forme, et on donnera au paramètre $\varkappa$ la valeur particulière $\varkappa_0$, ce qui revient à remplacer les dérivées relatives à $\varkappa$ par des variations correspondantes. On aura, par exemple, en comprenant toujours les valeurs limites des variables parmi les fonctions qui changent de forme avec $\varkappa$,

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{V}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\delta\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,\delta x\right),$$

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}dx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(\delta\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,\delta y\right)dx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}\delta x,$$

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}dzdx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\delta\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,\delta y\right)dzdx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\left(\delta z+\frac{dz}{dy}\,\delta y\right)dx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{V}\,\delta x\,.\,dz.$$

Quand on aura décomposé les signes de substitution double en signes de substitution simple, on donnera aux variations symboliques δx, δy, δz leurs significations réelles δx_1, δy_1, δz_1, ou δx_2, δy_2, δz_2, conformément aux conventions admises. La seconde formule, par exemple, ainsi développée devient

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \delta \mathrm{V}.dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_2} \frac{d\mathrm{V}}{dy} \delta y_2 . dx - \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \frac{d\mathrm{V}}{dy} \delta y_1 . dx$$

$$+ \Big|^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} \delta x_2 - \Big|^{x_1} \Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} \delta x_1 .$$

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que la variation d'une expression définie quelconque se prêtera à toutes les réductions que nous avons fait subir aux variations des intégrales définies, et que ces réductions s'effectueront dans tous les cas suivant la règle déjà formulée (nº 27).

31. On trouvera de même les variations seconde, troisième, etc., d'une intégrale ou plus généralement d'une expression définie quelconque, en la différentiant plusieurs fois de suite par rapport au paramètre $\varkappa$, comme on l'a indiqué dans la deuxième leçon, et l'on amènera les variations obtenues à la forme qu'exige leur application immédiate, par le procédé suffisamment expliqué de l'intégration par parties.

Mais il est temps de montrer par quelques exemples, choisis parmi ceux qui se présentent le plus souvent, comment on procédera dans chaque cas particulier à l'application des principes généraux que nous avons posés et des règles que nous avons énoncées.

QUATRIÈME LEÇON.

Variation d'une intégrale simple, double, triple. — Conditions d'intégrabilité des expressions différentielles à une, deux, trois variables indépendantes.

32. Problème I. — *Trouver la variation de l'intégrale définie simple*

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

dans laquelle

$$V = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}),$$

y étant une fonction de x à forme variable, et $y', y'', \ldots$, ses dérivées successives.

En vertu de la formule (1), p. 45, on a d'abord

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta V . dx + \Big|_{x_1}^{x_2} V \delta x.$$

Désignons par $P, P_1, P_2, \ldots, P_n$ les dérivées partielles de V relatives à $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, en sorte que

$$P = \frac{dV}{dy}, \quad P_1 = \frac{dV}{dy'}, \quad P_2 = \frac{dV}{dy''}, \ldots, \quad P_n = \frac{dV}{dy^{(n)}};$$

nous aurons (n° 24)

$$\delta V = P \delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \ldots + P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n},$$

et par suite, en substituant,

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(P\,\delta y + P_1 \frac{d\,\delta y}{dx} + \ldots + P_n \frac{d^n \delta y}{dx_n} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} V\,\delta x,$$

expression qu'il s'agit de transformer de telle sorte que les dérivées de δy ne soient plus affectées d'intégration. En appliquant le procédé de l'intégration par parties (n°s 19, 27), on trouve :

Par une seule réduction

$$\int_{x_1}^{x_2} P_1 \frac{d\,\delta y}{dx}\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2} P_1\,\delta y - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP_1}{dx}\,\delta y . dx;$$

par deux réductions successives

$$\int_{x_1}^{x_2} P_2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2}\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2} \left(P_2 \frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx}\,\delta y \right) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 P_2}{dx^2}\,\delta y . dx,$$

etc; et enfin par n réductions successives

$$\int_{x_1}^{x_2} P_n \frac{d^n \delta y}{dx_n}\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2} \left(P_n \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dP_n}{dx}\frac{d^{n-2}\delta y}{dx^{n-2}} + \frac{d^2 P_n}{dx^2}\frac{d^{n-3}\delta y}{dx^{n-3}} - \ldots \mp \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}}\,\delta y \right)$$
$$\pm \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^n P_n}{dx^n}\,\delta y . dx.$$

Si l'on substitue ces valeurs et que l'on fasse, pour abréger,

$$(P) = P - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \frac{d^3 P_3}{dx^3} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n P_n}{dx^n},$$
$$(P_1) = P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2 P_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}},$$
$$(P_2) = P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} P_n}{dx^{n-2}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(P_n) = P_n,$$

la variation de l'intégrale deviendra

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \delta S = &\int_{x_1}^{x_2} (P)\,\delta y\,.\,dx \\ &+\int_{x_1}^{x_2} \left\{ (P_1)\,\delta y + (P_2)\,\frac{d\,\delta y}{dx} + \ldots + (P_n)\,\frac{d^{n-1}\,\delta y}{dx^{n-1}} \right\} \\ &+\int^{x_2} V\,\delta x_2 - \int^{x_1} V\,\delta x_1. \end{aligned}\right.$$

Il importe de remarquer que cette variation se compose de trois parties essentiellement distinctes les unes des autres, à savoir : 1° l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (P)\,\delta y\,.\,dx$$

dont la valeur dépend de la forme attribuée à la variation δy ; 2° l'expression

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ (P_1)\,\delta y + (P_2)\,\frac{d\,\delta y}{dx} + \ldots + (P_n)\,\frac{d^{n-1}\,\delta y}{dx^{n-1}} \right\},$$

qui ne dépend pas de cette forme en général, mais seulement des valeurs que δy et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-1$, inclusivement, prennent aux limites de l'intégrale, c'est-à dire pour $x = x_1$ et $x = x_2$; 3° les deux termes

$$\int^{x_2} V\,\delta x_2 - \int^{x_1} V\,\delta x_1,$$

qui dépendent de la seule variation des limites.

33. Entre les valeurs limites des variations et les variations des valeurs limites de y, y', y'', ..., il y a certaines relations très-simples qui permettent d'exprimer

les unes au moyen des autres. Si l'on prend, en effet, la variation des expressions définies

$$\int^{x_1} y,\ \int^{x_2} y,\ \int^{x_1} y',\ \int^{x_2} y',\ \int^{x_1} y'',\ \int^{x_2} y'',\ \ldots,$$

on trouve (nº 30)

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta\int^{x_1} y = \int^{x_1} (\delta y + y'\,\delta x),\quad \delta\int^{x_2} y = \int^{x_2} (\delta y + y'\,\delta x), \\ \delta\int^{x_1} y' = \int^{x_1} (\delta y' + y''\delta x),\quad \delta\int^{x_2} y' = \int^{x_2} (\delta y' + y''\,\delta x), \\ \delta\int^{x_1} y'' = \int^{x_1} (\delta y'' + y'''\delta x),\quad \delta\int^{x_2} y'' = \int^{x_2} (\delta y'' + y'''\delta x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En appelant, pour simplifier, ξ, η, η', η'', ... les valeurs de $x, y, y', y'', \ldots$ qui correspondent à l'une des limites de l'intégrale, ou à l'une des extrémités de la courbe plane dont x, y sont les coordonnées, on pourra remplacer ces deux systèmes d'équations par le système unique

$$\begin{aligned} \delta\eta &= \big|\,\delta y + \eta'\,\delta\xi, \\ \delta\eta' &= \big|\,\delta y' + \eta''\,\delta\xi, \\ \delta\eta'' &= \big|\,\delta y'' + \eta'''\delta\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dans lequel le signe $|$ indique la substitution simple de la limite de x que l'on considère. Il en résulte, en transposant et ayant égard aux identités $\delta y' = \dfrac{d\delta y}{dx}$,

$\delta y'' = \dfrac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots,$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta y &= \delta\eta - \eta'\delta\xi,\\ \frac{d\delta y}{dx} &= \delta\eta' - \eta''\delta\xi,\\ \frac{d^2\delta y}{dx^2} &= \delta\eta'' - \eta'''\delta\xi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces relations font voir que dans le cas où la valeur limite ξ de x est invariable, de sorte que $\delta\xi = 0$, les valeurs limites correspondantes de δy, $\dfrac{d\delta y}{dx}$, $\dfrac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots$ coïncident avec les variations des valeurs limites $\eta, \eta', \eta'', \ldots,$ de $y, y', y'', \ldots$. Donc, si ces dernières variations étaient nulles en même temps que $\delta\xi$, pour les deux limites de l'intégrale, c'est-à-dire si les valeurs extrêmes de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ ne devaient point varier ou changer de forme, les valeurs limites de δy, $\dfrac{d\delta y}{dx}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}$ seraient également nulles, et la variation de l'intégrale (2) se réduirait à son premier terme

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} (P)\,\delta y\,.\,dx.$$

34. Si $V dx$ était une différentielle exacte, ou, en d'autres termes, si V contenait la variable x et les fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ de telle manière qu'on pût obtenir l'intégrale $\int V dx$, indépendamment de toute forme particulière assignée à la fonction y, cette intégrale serait elle-même une fonction déterminée de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$; prise entre les limites x_1, x_2, elle ne dépendrait donc que de ces mêmes limites et des valeurs correspondantes de $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, et elle resterait constante quand

même on ferait varier arbitrairement la forme de la fonction y, pourvu que les valeurs limites de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ restassent invariables; sa variation serait donc nulle, quelle que fût la variation δy. Or, dans le cas où les valeurs limites de x, $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ ne varient point, on a vu que la variation de l'intégrale se réduit au seul terme

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{P})\,\delta y \,.\, dx\,;$$

ce terme devrait donc s'évanouir quel que fût δy, ce qui évidemment est impossible, à moins qu'on n'ait identiquement $(\mathrm{P}) = 0$. Réciproquement, si cette condition est remplie, la variation de l'intégrale ne dépendra que des variations des valeurs limites de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$; l'intégrale définie sera donc elle-même une fonction déterminée de ces limites, c'est-à-dire que l'expression $\mathrm{V}dx$ pourra s'intégrer immédiatement, quelle que soit la fonction y. Pour que $\mathrm{V}dx$ soit une différentielle exacte, il faut donc et il suffit que l'équation $(\mathrm{P}) = 0$, ou

$$\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{P}_1}{dx} + \frac{d^2\mathrm{P}_2}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n\mathrm{P}_n}{dx^n} = 0,$$

soit identique, quelque forme qu'on assigne à la fonction y.

Le calcul des variations conduit ainsi très-simplement à la condition d'intégrabilité connue d'une expression différentielle $\mathrm{V}dx$.

35. Dans toutes les applications du calcul des variations aux intégrales simples, c'est toujours l'expression

$$(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \frac{d\mathrm{P}_1}{dx} + \ldots \pm \frac{d^n\mathrm{P}_n}{dx^n}$$

qui joue le rôle principal; il importe donc de l'étudier de

plus près. Elle renferme, en général, les dérivées successives de y jusqu'à l'ordre $2n$, puisque V et ses dérivées partielles P, P_1, P_2, ..., P_n sont des fonctions de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Dans un seul cas cependant elle n'atteindra pas l'ordre $2n$; c'est lorsque V, étant linéaire par rapport à $y^{(n)}$, prendra la forme

$$V = Ay^{(n)} + B,$$

A et B étant des fonctions de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Dans ce cas, en effet, la dérivée partielle $P_n = A$ ne contenant plus $y^{(n)}$, sa dérivée $n^{ième}$ $\frac{d^n P_n}{dx^n}$, et par suite l'expression (P) ne saurait plus contenir $y^{(2n)}$. On démontre même facilement qu'alors l'ordre des dérivées de y dans cette dernière expression n'excédera pas $2n-2$ ou que (P) ne renfermera pas la dérivée $y^{(2n-1)}$. Cette dérivée ne pourrait, en effet, figurer que dans les deux derniers termes de (P) ou dans la différence

$$\frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}} - \frac{d^n P_n}{dx^n}.$$

Or, si l'on différentie $n-1$ fois de suite par rapport à x la quantité P_{n-1}, fonction explicite de $x, y, y', \ldots, y^{n)}$, le seul terme du résultat qui puisse contenir la dérivée $y^{(2n-1)}$, sera évidemment

$$\frac{dP_{n-1}}{dy^{(n)}} y^{(2n-1)};$$

de même, si l'on différentie n fois de suite la quantité P_n, fonction explicite de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, le seul terme

$$\frac{dP_n}{dy^{(n-1)}} y^{(2n-1)}$$

contiendra y^{2n-1}. Ainsi le coefficient de cette dérivée

dans l'expression (P) sera, au signe près,

$$\frac{dP_{n-1}}{dy^{(n)}} - \frac{dP_n}{dy^{(n-1)}},$$

différence qui disparaît en vertu de l'identité

$$\frac{dP_{n-1}}{dy^{(n)}} = \frac{d^2V}{dy^{(n-1)}\,dy^{(n)}} = \frac{dP_n}{dy^{(n-1)}}.$$

Donc, toutes les fois que V est une fonction linéaire par rapport à $y^{(n)}$, l'expression (P) est au plus de l'ordre $2n-2$ relativement aux dérivées de y. Cette disparition des termes en $y^{(2n)}$ et $y^{(2n-1)}$ est d'ailleurs évidemment une des conditions qui doivent être remplies pour que (P) soit identiquement nul, c'est-à-dire pour que $V\,dx$ soit une différentielle exacte.

36. Problème II. — *Trouver la variation de l'intégrale*

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx,$$

dans laquelle

$$V = f[x, y, y', \ldots, y^{(m)}, z, z', \ldots, z^{(n)}],$$

y et z étant des fonctions de x à formes variables, et y', y'', ..., z', z'', ..., leurs dérivées successives.

Désignons respectivement par P, P_1, P_2, ..., P_m, les dérivées partielles de V relatives à y, y', y'', ..., $y^{(m)}$, et par Q, Q_1, Q_2, ..., Q_n, les dérivées partielles de V relatives à z, z', z'', ..., $z^{(n)}$, en sorte que

$$P = \frac{dV}{dy}, \quad P_1 = \frac{dV}{dy'}, \quad P_2 = \frac{dV}{dy''}, \ldots, \quad P_m = \frac{dV}{dy^{(m)}},$$

$$Q = \frac{dV}{dz}, \quad Q_1 = \frac{dV}{dz'}, \quad Q_2 = \frac{dV}{dz''}, \ldots, \quad Q_n = \frac{dV}{dz^{(n)}};$$

nous aurons

$$\delta V = P\,\delta y + P_1 \frac{d\,\delta y}{dx} + P_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots + P_m \frac{d^m \delta y}{dx^m}$$

$$+ Q\,\delta z + Q_1 \frac{d\,\delta z}{dx} + Q_2 \frac{d^2\delta z}{dx^2} + \ldots + Q_n \frac{d^n \delta z}{dx^n},$$

et par suite

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(P\,\delta y + P_1 \frac{d\,\delta y}{dx} + \ldots + P_m \frac{d^m \delta y}{dx^m} \right.$$

$$\left. + Q\,\delta z + Q_1 \frac{d\,\delta z}{dx} + \ldots + Q_n \frac{d^n \delta z}{dx^n} \right) dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} V\,\delta x.$$

En intégrant par parties jusqu'à ce que toutes les dérivées de δy et de δz soient débarrassées du signe d'intégration, et faisant, pour abréger,

$$(P) = P - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \frac{d^3P_3}{dx^3} + \ldots + (-1)^m \frac{d^mP_m}{dx^m},$$

$$(P_1) = P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2P_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}P_m}{dx^{m-1}},$$

$$(P_2) = P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \ldots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}P_m}{dx^{m-2}},$$

. . . .

$$(P_m) = P_m;$$

$$(Q) = Q - \frac{dQ_1}{dx} + \frac{d^2Q_2}{dx^2} - \frac{d^3Q_3}{dx^3} + \ldots + (-1)^n \frac{d^nQ_n}{dx^n},$$

$$(Q_1) = Q_1 - \frac{dQ_2}{dx} + \frac{d^2Q_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}},$$

$$(Q_2) = Q_2 - \frac{dQ_3}{dx} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}Q_n}{dx^{n-2}};$$

. . . .

$$(Q_n) = Q_n,$$

on obtient finalement

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \{(P)\,\delta y + (Q)\,\delta z\}\,dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{(P_1)\,\delta y + (P_2)\,\frac{d\delta y}{dx} + \ldots + (P_m)\,\frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\right\} \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{(Q_1)\,\delta z + (Q_2)\,\frac{d\delta z}{dx} + \ldots + (Q_n)\,\frac{d^{n-1}\delta z}{dx^{n-1}}\right\} \\ &+ \Big|^{x_2} V\,\delta x_2 - \Big|^{x_1} V\,\delta x_1. \end{aligned}\right.$$

37. Si l'on appelle ξ, η, η', η'',.... ζ, ζ', ζ'',..., les valeurs de x, y, y', y'',..., z, z', z'',..., qui correspondent à l'une des limites de l'intégrale, ou à l'une des extrémités de la courbe dans l'espace dont x, y, z représentent les coordonnées, on trouvera, comme dans le cas précédent, en prenant les variations des expressions $|y$, $|y'$, $|y''$,..., $|z$, $|z'$, $|z''$,..., et transposant,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big|\delta y = \delta\eta - \eta'\,\delta\xi, &&\Big|\delta z = \delta\zeta - \zeta'\,\delta\xi, \\ &\Big|\frac{d\delta y}{dx} = \delta\eta' - \eta''\,\delta\xi, &&\Big|\frac{d\delta z}{dx} = \delta\zeta' - \zeta''\,\delta\xi, \\ &\Big|\frac{d^2\delta y}{dx^2} = \delta\eta'' - \eta'''\,\delta\xi, &&\Big|\frac{d^2\delta z}{dx^2} = \delta\zeta'' - \zeta'''\,\delta\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

le signe $|$ indiquant la substitution simple de la limite de x que l'on considère. On en conclura que si les limites x_1, x_2, ainsi que les valeurs correspondantes de $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$, $z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}$ ne doivent point varier, non-seulement les variations δx_1, δx_2, mais de plus les valeurs limites de $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}, \delta z,$

$\frac{d\delta z}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}\delta z}{dx^{n-1}}$, sont nulles, que par suite tous les termes affectés de substitution disparaissent et que la variation de l'intégrale se réduit à

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \{(P)\,\delta y + (Q)\,\delta z\}\, dx.$$

38. Lorsque $V dx$ est une différentielle exacte, de sorte que l'intégration puisse s'effectuer indépendamment de toutes formes particulières attribuées aux fonctions y, z, l'intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ est elle-même une fonction déterminée des valeurs limites de $x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}$, $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$; si en outre ces valeurs limites restent invariables, l'intégrale est nécessairement constante et sa variation nulle, quels que soient d'ailleurs les changements de forme de y et de z, ou les variations δy, δz; ce qui ne peut avoir lieu évidemment qu'autant que l'on ait identiquement

$$(P) = 0, \quad (Q) = 0.$$

Telles sont donc, dans le cas actuel, les conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle $V dx$.

39. Problème III. — *Soit z une fonction de x, y, à forme variable, et p, q, r, s, t ses dérivées partielles du premier et du second ordre; soit de plus*

$$V = f(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

et cherchons la variation de l'intégrale double

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V\, dy\, dx,$$

les limites étant censées variables.

Désignons respectivement par N, P, Q, R, S, T les dérivées partielles de V relatives à z, p, q, r, s, t, en sorte que l'on ait

$$\mathrm{N}=\frac{d\mathrm{V}}{dz},\ \mathrm{P}=\frac{d\mathrm{V}}{dp},\ \mathrm{Q}=\frac{d\mathrm{V}}{dq},\ \mathrm{R}=\frac{d\mathrm{V}}{dr},\ \mathrm{S}=\frac{d\mathrm{V}}{ds},\ \mathrm{T}=\frac{d\mathrm{V}}{dt};$$

la variation de V sera (n° 24)

$$\delta\mathrm{V}=\mathrm{N}\,\delta z+\mathrm{P}\frac{d\delta z}{dx}+\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dy}+\mathrm{R}\frac{d^2\delta z}{dx^2}+\mathrm{S}\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}+\mathrm{T}\frac{d^2\delta z}{dy^2},$$

et celle de U (n° 25)

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{U}=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big(&\mathrm{N}\,\delta z+\mathrm{P}\frac{d\delta z}{dx}+\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dy}\\&+\mathrm{R}\frac{d^2\delta z}{dx^2}+\mathrm{S}\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}+\mathrm{T}\frac{d^2\delta z}{dy^2}\Big)\,dy\,dx\\&+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}\,\delta y\,.\,dx+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}\,\delta x\,.\,dy,\end{aligned}$$

expression qu'il s'agit de transformer, en recourant à l'intégration par parties, de telle sorte que la variation δz ne soit plus différentiée par rapport aux variables d'intégration (n° 27). Cette transformation se fait immédiatement pour les deux termes qui contiennent les dérivées de δz du premier ordre, car on a

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{P}\frac{d\delta z}{dx}\cdot dy\,dx=\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{P}\,\delta z\,.\,dy-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{P}\frac{dy}{dx}\,\delta z\,.\,dx\\-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d\mathrm{P}}{dx}\,\delta z\,.\,dy\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dy}\cdot dy\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{Q}\,\delta z\,.\,dx\\-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\,\delta z\,.\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Chacun des trois termes qui contiennent les dérivées du second ordre de la variation δz, exige, au contraire, deux séries d'opérations. Pour celui, par exemple, qui contient $\frac{d^2\delta z}{dx^2}$, on a d'abord

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{d^2\delta z}{dx^2}\cdot dy\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{d\delta z}{dx}\cdot dy$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\cdot dx$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\;dy\,dx;$$

puis, en appliquant de nouveau aux deux derniers termes l'intégration par parties,

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\cdot dx = \Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{dy}{dx}\,\delta z$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(\mathrm{R}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d\mathrm{R}}{dy}\,\frac{dy^2}{dx^2}\right)\delta z.dx$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\,\frac{dy^2}{dx^2}\,\frac{d\delta z}{dy}\cdot dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\cdot dy\,dx = \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\delta z.dy$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,\frac{dy}{dx}\,\delta z.\,dx$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}\,\delta z.dy\,dx,$$

et par suite, en substituant,

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{R}\frac{d^2\delta z}{dx^2}\cdot dy\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}\delta z\,.\,dy\,dx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(\mathrm{R}\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{d\mathrm{R}}{dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d\mathrm{R}}{dy}\frac{dy^2}{dx^2}\right)\delta z\,.\,dx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{R}\frac{dy^2}{dx^2}\frac{d\delta z}{dy}\cdot dx$$

$$-\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\delta z-\mathrm{R}\frac{d\delta z}{dx}\right)dy$$

$$-\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{R}\frac{dy}{dx}\delta z.$$

On trouvera de même successivement

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{S}\frac{d^2\delta z}{dxdy}\ dy\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d^2\mathrm{S}}{dxdy}\delta z\,.\,dy\,dx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(\frac{d\mathrm{S}}{dx}\delta z+\mathrm{S}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta z}{dy}\right)dx$$

$$-\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d\mathrm{S}}{dy}\delta z\,.\,dy$$

$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{S}\delta z,$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{T}\frac{d^2\delta z}{dy^2}\cdot dy\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2}\delta z\,.\,dy\,dz$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dy}\delta z-\mathrm{T}\frac{d\delta z}{dy}\right)dx.$$

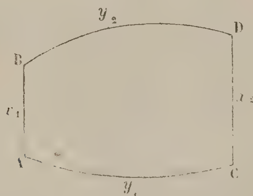
Substituant enfin aux divers termes de la variation δU les valeurs transformées fournies par les développements

qui précèdent, on aura définitivement

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta U = & \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2}\right)\delta z . dy dx \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big(Q - P\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dR}{dx}\frac{dy}{dx} \\
& \qquad\qquad + \frac{dR}{dy}\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dy}\Big)\delta z . dx \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(R\frac{dy^2}{dx^2} - S\frac{dy}{dx} + T\right)\frac{d\delta z}{dy} . dx \\
& + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\delta z . dy \\
& + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} R\frac{d\delta z}{dx} . dy \\
& + \Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\left(S - R\frac{dy}{dx}\right)\delta z \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} V\delta y . dx + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} V\delta x . dy
\end{aligned}
\right.
$$

40. Arrêtons-nous quelques instants à cette formule pour mieux discerner la nature et la portée de ses différents termes. Si x, y, z représentent les coordonnées rectilignes d'un point dans l'espace, l'équation $y = y_1$ déterminera une certaine courbe AC (*fig.* 1), située dans le plan

Fig. 1.



xy; $y = y_2$ sera l'équation d'une seconde courbe BD; de

même les équations $x = x_1$ et $x = x_2$ représentent deux droites AB et CD parallèles à l'axe des y, et la surface ABDC comprise entre ces quatre lignes est précisément le champ de l'intégrale double. Cela posé, pour obtenir une expression de la forme

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} Z\,dx,$$

qui se décompose en

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_2} Z\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} Z\,dx,$$

Z étant une fonction quelconque de x et y, il faut faire tour à tour dans cette fonction $y = y_1$, $y = y_2$, et intégrer $Z\,dx$, après la substitution, entre les limites x_1 et x_2; ce qui revient de fait à intégrer $Z\,dx$ le long des deux courbes BD et AC et à prendre la différence des deux résultats.

De même pour calculer l'expression

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} Z\,dy,$$

égale à

$$\Big|^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} Z\,dy - \Big|^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} Z\,dy,$$

il faudra intégrer $Z\,dy$ le long des deux droites CD, AB et prendre la différence des résultats. Enfin, toute expression de la forme

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} Z = \Big|^{x_2} \Big|^{y_2} Z - \Big|^{x_2} \Big|^{y_1} Z - \Big|^{x_1} \Big|^{y_2} Z + \Big|^{x_1} \Big|^{y_1} Z$$

est la somme ou la différence des valeurs de la fonction Z

correspondantes aux quatre sommets A, B, C, D, du contour limite.

Dès lors l'ensemble des termes de la variation δU se partage en trois groupes distincts :

1° Une intégrale double qui dépend de la forme attribuée à la fonction arbitraire δz;

2° Des termes qui ne dépendent plus de la forme générale de δz, mais uniquement des valeurs que cette variation et ses dérivées partielles $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dy}$ prennent le long du contour limite ABDC;

3° Des termes en δx_1, δx_2, δy_1, δy_2, qui proviennent de la déformation des limites.

Dans les termes du second groupe on pourrait encore remplacer les valeurs limites des variations par les variations des valeurs limites, en partant des relations simples (n° 30)

$$\delta \int^{x_1} z = \int^{x_1} \left(\delta z + \frac{dz}{dx} \delta x \right),$$

$$\delta \int^{y_1} z = \int^{y_1} \left(\delta z + \frac{dz}{dy} \delta y \right),$$

$$\delta \int^{x_1} \int^{y_1} z = \int^{x_1} \int^{y_1} \left[\delta z + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \right) \delta x + \frac{dz}{dy} \delta y \right],$$

$$\delta \int^{x_1} \frac{dz}{dx} = \int^{x_1} \left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} \delta x \right),$$

$$\delta \int^{y_1} \frac{dz}{dy} = \int^{y_1} \left(\frac{d\delta z}{dy} + \frac{d^2 z}{dy^2} \delta y \right),$$

$$\delta \int^{x_2} z = \text{etc.}$$

On verrait alors immédiatement que si les limites des intégrations ainsi que les valeurs de z, p, q correspon-

dantes à ces limites ne varient pas ou ne changent pas de forme, la variation δz et ses dérivées $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dy}$ seront nulles le long du contour ABDC, et que par suite la variation de l'intégrale se réduira à son premier terme

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(\mathrm{N}-\frac{d\mathrm{P}}{dx}-\frac{d\mathrm{Q}}{dy}+\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{S}}{dxdy}+\frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2}\right)\delta z.dydx.$$

41. On déduit facilement de ce qui précède la condition d'intégrabilité d'une expression différentielle $\mathrm{V}dydx$ à deux variables indépendantes. En effet, s'il était possible d'intégrer cette expression une première fois sans donner à z aucune forme particulière, ou de réduire l'intégrale définie double

$$\mathrm{U}=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{V}dydx$$

à une intégrale simple prise le long du contour limite ABDC, U ne dépendrait plus de la forme générale de z, mais seulement des valeurs que z, p, q prennent sur ce contour. Donc, si les limites de x, y et les valeurs correspondantes de z, p, q ne devaient pas subir de déformation, l'intégrale U serait constante et sa variation nulle, quel que fût d'ailleurs δz. Mais dans ce cas la variation de l'intégrale se réduit, comme on l'a vu, à son premier terme, et celui-ci ne peut être nul, quel que soit δz, à moins que l'on n'ait identiquement, et pour toutes les formes de z,

$$\Omega=\mathrm{N}-\frac{d\mathrm{P}}{dx}-\frac{d\mathrm{Q}}{dy}+\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{S}}{dxdy}+\frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2}=0;$$

telle est donc la condition d'intégrabilité cherchée.

Pour que l'équation $\Omega=0$ ait lieu quelle que soit la

forme de z, il est d'abord nécessaire que les coefficients des dérivées de z du quatrième ordre, dérivées qui entrent évidemment sous forme linéaire dans le seul trinôme

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2}$$

disparaissent séparément. Or en développant $\frac{d^2R}{dx^2}$, $\frac{d^2S}{dxdy}$, $\frac{d^2T}{dy^2}$, et n'écrivant que les termes qui contiennent les dérivées de z du quatrième ordre, on a

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \ldots \frac{d^2V}{dr^2}\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{d^2V}{drds}\frac{d^4z}{dx^3dy} + \frac{d^2V}{drdt}\frac{d^4z}{dx^2dy^2},$$
$$\frac{d^2S}{dxdy} = \ldots \frac{d^2V}{drds}\frac{d^4z}{dx^3dy} + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^2V}{dsdt}\frac{d^4z}{dxdy^3},$$
$$\frac{d^2T}{dy^2} = \ldots \frac{d^2V}{drdt}\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^2V}{dsdt}\frac{d^4z}{dxdy^3} + \frac{d^2V}{dt^2}\frac{d^4z}{dy^4}.$$

Ajoutant et égalant à zéro les coefficients de $\frac{d^4z}{dx^4}$, $\frac{d^4z}{dx^3dy}$, $\frac{d^4z}{dx^2dy^2}$, $\frac{d^4z}{dxdy^3}$, $\frac{d^4z}{dy^4}$, on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2V}{dr^2} = 0, \quad \frac{d^2V}{drds} = 0, \quad \frac{d^2V}{ds^2} + 2\frac{d^2V}{drdt} = 0, \\ \frac{d^2V}{dsdt} = 0, \quad \frac{d^2V}{dt^2} = 0, \end{array}\right.$$

équations aux dérivées partielles qui suffisent pour déterminer V en fonction de r, s, t. En effet, la seconde et la quatrième exigent que la dérivée $\frac{dV}{ds}$ ne dépende ni de r, ni de t, ou que des trois quantités r, s, t, elle ne renferme plus que s; par suite on peut poser

$$\frac{dV}{ds} = \psi'(s);$$

intégrant et ajoutant une fonction arbitraire de r, t, on a donc

$$V = \varphi(r, t) + \psi(s).$$

La première et la dernière des équations (7) exigent en outre que $\frac{dV}{dr}$ soit indépendant de r et $\frac{dV}{dt}$ indépendant de t; $\varphi(r, t)$ doit donc être une fonction linéaire tant par rapport à r que par rapport à t, c'est-à-dire qu'on aura

$$\varphi(r, t) = Art + Br + Dt + F.$$

Enfin la troisième des équations (7), devenue

$$\psi''(s) + 2A = 0,$$

donne par deux intégrations successives

$$\psi(s) = -As^2 + 2Cs + G;$$

d'où il résulte définitivement

$$(8) \qquad V = A(rt - s^2) + Br + 2Cs + Dt + E,$$

A, B, C, D, E étant des fonctions de x, y, z, p, q. Telle est la forme que V doit avoir par rapport à r, s, t, pour que l'intégrale double U puisse se réduire immédiatement à une intégrale simple. Il faut en outre que les coefficients A, B, C, D, E satisfassent à certaines relations qu'on trouverait facilement par la condition même que Ω doit s'évanouir quelle que soit la fonction z et ses dérivées successives; mais nous croyons inutile de les développer ici (*). Il nous suffira pour le moment de montrer que la forme (8) fait disparaître avec les dérivées de z du quatrième ordre, celles aussi du troisième, en sorte que Ω ne contienne plus

(*) Voyez *An elementary Treatise on the calculus of variations*, de Jellett, p. 344, où cette matière se trouve développée avec plus de détail.

que x, y, z, p, q, r, s, t. Cette fonction, en effet, peut se mettre sous la forme

$$\Omega = \mathrm{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dy} - \mathrm{P}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dy} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dx} - \mathrm{Q}\right).$$

Or on trouve

$$\mathrm{N} = (rt - s^2)\frac{d\mathrm{A}}{dz} + r\frac{d\mathrm{B}}{dz} + 2s\frac{d\mathrm{C}}{dz} + t\frac{d\mathrm{D}}{dz} + \frac{d\mathrm{E}}{dz},$$

$$\mathrm{P} = (rt - s^2)\frac{d\mathrm{A}}{dp} + r\frac{d\mathrm{B}}{dp} + 2s\frac{d\mathrm{C}}{dp} + t\frac{d\mathrm{D}}{dp} + \frac{d\mathrm{E}}{dp},$$

$$\mathrm{Q} = (rt - s^2)\frac{d\mathrm{A}}{dq} + r\frac{d\mathrm{B}}{dq} + 2s\frac{d\mathrm{C}}{dq} + t\frac{d\mathrm{D}}{dq} + \frac{d\mathrm{E}}{dq},$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}, \quad \mathrm{S} = -2\mathrm{A}s + 2\mathrm{C}, \quad \mathrm{T} = \mathrm{A}r + \mathrm{D},$$

et, en différentiant,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \mathrm{A}\frac{d^3z}{dx\,dy^2} + t\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}p + \frac{d\mathrm{A}}{dp}r + \frac{d\mathrm{A}}{dq}s\right)$$
$$+ \frac{d\mathrm{B}}{dx} + \frac{d\mathrm{B}}{dz}p + \frac{d\mathrm{B}}{dp}r + \frac{d\mathrm{B}}{dq}s,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dy} = -\mathrm{A}\frac{d^3z}{dx\,dy^2} - s\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}q + \frac{d\mathrm{A}}{dp}s + \frac{d\mathrm{A}}{dq}t\right)$$
$$+ \frac{d\mathrm{C}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dz}q + \frac{d\mathrm{C}}{dp}s + \frac{d\mathrm{C}}{dq}t.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}p + \frac{d\mathrm{C}}{dq} - \frac{d\mathrm{D}}{dp},$$

$$\mathrm{K} = \frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}q + \frac{d\mathrm{C}}{dp} - \frac{d\mathrm{B}}{dq},$$

il viendra donc, en omettant les termes d'ordre inférieur au second,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dy} - \mathrm{P} = \ldots \mathrm{H}t - \mathrm{K}s;$$

on trouverait de même

$$\frac{d\mathrm{T}}{dy} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{dy} - \mathrm{Q} = \ldots \mathrm{K}r - \mathrm{H}s;$$

et, par conséquent, les seuls termes de Ω qui pourraient contenir des dérivées de z du troisième ordre seront

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{H}t - \mathrm{K}s) + \frac{d}{dy}(\mathrm{K}r - \mathrm{H}s);$$

mais ici ces dérivées disparaissent, parce qu'elles sont affectées de coefficients égaux et de signes contraires. Il est donc bien prouvé que la disparition des dérivées du quatrième ordre entraîne celle des dérivées du troisième, et que, dans le cas où V prend la forme (8), l'expression Ω ne contient plus que les dérivées de z du premier et du second ordre.

42. Considérons maintenant le cas où V étant de la forme

$$\mathrm{V} = f(x, y, z, p, q)$$

ne renferme plus les dérivées de z du second ordre; en conservant les notations des numéros précédents, nous aurons

$$\mathrm{R} = 0, \quad \mathrm{S} = 0, \quad \mathrm{T} = 0,$$

et la variation de l'intégrale (16) deviendra

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,dy\,dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\right) \delta z.\,dy\,dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \left(\mathrm{Q} - \mathrm{P}\frac{dy}{dx}\right) \delta z.\,dx \\ &+ \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{P}\,\delta z.\,dy \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,\delta y.\,dx + \Big|_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,\delta x.\,dy. \end{aligned}\right.$$

Si les limites x_1, x_2, y_1, y_2 ne varient pas, les deux derniers termes disparaîtront; il en sera de même du second et du troisième terme, si, en outre, les valeurs limites de z restent invariables.

Le trinôme

$$\Omega = N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy},$$

coefficient de δz dans le premier terme, est généralement du second ordre par rapport aux dérivées de z, c'est-à-dire qu'il renferme x, y, z, p, q, r, s, t. Pour qu'il cesse de renfermer les dérivées du second ordre r, s, t, il faut qu'on ait

$$\frac{d^2V}{dp^2} = 0, \quad \frac{d^2V}{dp\,dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = Ap + Bq - C,$$

A, B, C étant des fonctions quelconques de x, y, z. On prouverait sans peine que cette forme linéaire de V fait disparaître en même temps les dérivées de z du premier ordre et que Ω devient dans ce cas

$$\Omega = -\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dz}.$$

Si les coefficients A, B, C étaient tels, qu'on eût identiquement

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0,$$

Ω serait nul pour toutes les formes de z; la variation de l'intégrale ne dépendrait plus que des variations des valeurs limites de x, y, z; l'intégrale double serait donc elle-même une fonction déterminée de ces valeurs limites et se réduirait à une intégrale simple.

43. Problème IV. — *Soit u une fonction de x, y, z à forme variable, et p, q, r ses dérivées partielles du premier ordre; soit de plus*

$$V = f(x, y, z, u, p, q, r),$$

et cherchons la variation de l'intégrale définie triple

$$U = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,dz\,dy\,dx,$$

les limites x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 *pouvant elles-mêmes subir des déformations.*

Désignons respectivement par N, P, Q, R les dérivées partielles de V relatives à u, p, q, r, en sorte que

$$N = \frac{dV}{du}, \quad P = \frac{dV}{dp}, \quad Q = \frac{dV}{dq}, \quad R = \frac{dV}{dr};$$

la variation de V sera

$$\delta V = N\,\delta u + P\,\frac{d\delta u}{dx} + Q\,\frac{d\delta u}{dy} + R\,\frac{d\delta u}{dz},$$

et celle de l'intégrale (n° 25)

$$\delta U =$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(N\,\delta u + P\,\frac{d\delta u}{dx} + Q\,\frac{d\delta u}{dy} + R\,\frac{d\delta u}{dz}\right) dz\,dy\,dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} V\,\delta z\,.\,dy\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,\delta y\,.\,dz\,dx$$

$$+ \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\,\delta x\,.\,dz\,dy.$$

Après qu'on a effectué toutes les intégrations par parties nécessaires pour que δz ne soit plus différentiée par rapport aux variables d'intégration, la variation de l'inté-

grale prend la forme définitive

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta U = & \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dz}\right)\delta u \,.\, dzdydx \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left(R - P\frac{dz}{dx} - Q\frac{dz}{dy}\right)\delta u \,.\, dydx \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(Q - P\frac{dy}{dx}\right)\delta u \,.\, dzdx \\
& + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} P\delta u \,.\, dzdy \\
& + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} V\delta z \,.\, dydx + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\delta y \,.\, dzdx \\
& + \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} V\delta x \,.\, dzdy.
\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites précédemment sur la nature et la portée des termes de la variation d'une intégrale double. Si x, y, z désignent les coordonnées rectilignes d'un point dans l'espace, le champ de l'intégrale triple sera limité : 1° en bas et en haut, dans le sens des z, par deux surfaces courbes C_1 et C_2 déterminées par les équations $z = z_1$ et $z = z_2$; 2° en avant et en arrière, dans le sens des y, par deux surfaces cylindriques B_1 et B_2 perpendiculaires au plan xy et ayant pour équations $y = y_1$ et $y = y_2$; 3° à gauche et à droite, dans le sens des x, par deux plans A_1 et A_2 perpendiculaires à l'axe des x et déterminées par les équations $x = x_1$ et $x = x_2$. Cela posé, l'intégrale triple qui forme le premier terme de la variation δU s'étendra à toutes les valeurs de x, y, z, comprises entre les six surfaces limites A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, tandis que les intégrales doubles avec un signe de substi-

tution qui constituent les autres termes, ne s'étendront qu'aux valeurs de x, y, z correspondantes à ces mêmes surfaces limites, ou seront prises suivant les aires de ces surfaces, $\int\int|$ suivant C_1 et C_2, $\int|\int$ suivant B_1 et B_2, $|\int\int$ suivant A_1 et A_2.

On voit donc que la variation complète de l'intégrale U contient trois espèces de termes de nature différente : 1° une intégrale triple qui dépend de la forme attribuée à la fonction arbitraire δu; 2° différents termes qui ne dépendent pas de la forme générale de δu, mais uniquement des valeurs que cette fonction prend sur les surfaces limites A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2; 3° des termes qui, provenant de la déformation des limites, ne dépendent que des variations δx_1, δx_2, δy_1, δy_2, δz_1, δz_2.

44. Ici encore les valeurs limites de la variation δu pourraient s'exprimer au moyen des variations des valeurs limites de u, et l'on verrait, dans le cas où les limites de l'intégrale ainsi que les valeurs correspondantes de u, ne doivent pas varier ou changer de forme, que tous les termes aux limites disparaissent de la variation de l'intégrale; celle-ci alors est réduite à son premier terme et l'on a

$$\delta U = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dz}\right)\delta u . dz dy dx.$$

Si l'on avait identiquement

$$\Omega = N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dz} = 0,$$

l'intégrale triple U ne dépendant plus de la forme de u en général, mais seulement de ses valeurs limites, serait nécessairement réductible à une intégrale double. Mais l'équation $\Omega = 0$ ne sera identique qu'autant que V sera

une fonction linéaire de p, q, r de la forme

$$V = Ap + Bq + Cr - D,$$

les fonctions A, B, C, D ne contenant que x, y, z, u, et étant liées entre elles par la relation

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \frac{dD}{du} = 0.$$

Telle est donc la forme que V doit avoir pour remplir la condition d'intégrabilité exprimée par l'équation $\Omega = 0$. Ajoutons que dans l'expression Ω, les dérivées de u du premier ordre disparaissent toujours en même temps que celles du second ordre, et que cela a lieu toutes les fois que V prend la forme linéaire $Ap + Bq + Cr - D$, quels que soient d'ailleurs les coefficients A, B, C, D.



CINQUIÈME LEÇON.

Maxima et minima des intégrales et en général des expressions définies. — Maximum ou minimum absolu. — Maximum ou minimum relatif. — Diverses espèces de conditions ou de restrictions. — Équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues pour rendre nulle la variation de l'intégrale ou de l'expression définie.

---

45. Dans les questions de maxima et de minima qui dépendent du calcul des variations, on cherche à déterminer la forme d'une ou de plusieurs fonctions inconnues, contenues dans une intégrale définie soit simple, soit multiple, ou, plus généralement, dans une expression définie, de manière que cette intégrale ou cette expression définie atteigne sa plus grande ou sa plus petite valeur. Entre ces questions et les problèmes de maxima et minima qu'on sait résoudre par le calcul différentiel, il y a donc une différence essentielle : dans ces derniers problèmes on cherche les valeurs des variables indépendantes qui rendent maximum ou minimum une fonction dont la forme est donnée, tandis que dans le calcul des variations on cherche la forme même de la fonction ou la relation générale qui la lie aux variables indépendantes. Cependant ce second problème se ramène facilement au premier, et voici comment :

Concevons pour un moment qu'on ait déjà déterminé convenablement toutes les fonctions inconnues, et qu'on les fasse ensuite varier au moyen d'un paramètre arbitraire $\varkappa$; soit $\varkappa_0$ la valeur initiale de $\varkappa$ correspondante aux

formes de ces fonctions qui donnent à l'intégrale sa plus grande ou plus petite valeur. L'intégrale ou l'expression définie sera alors elle-même une fonction de $\varkappa$; pour qu'elle devienne réellement un maximum ou un minimum pour $\varkappa = \varkappa_0$, il faut donc que sa dérivée par rapport à $\varkappa$ s'évanouisse pour $\varkappa = \varkappa_0$, sans que cette valeur du paramètre $\varkappa$ rende nulle la dérivée du second ordre, dont le signe servira à distinguer le maximum du minimum.

Pour mieux fixer les idées, désignons par V une expression qui renferme explicitement non-seulement les variables x, y, z, ..., mais une ou plusieurs fonctions inconnues u, v, w,... de ces variables, et supposons qu'il s'agisse de déterminer les fonctions u, v, w, ... ainsi que les limites x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, .., de manière que l'intégrale

$$S = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \ldots V \ldots dz\,dy\,dx$$

devienne un maximum ou un minimum. D'après ce que nous venons de dire, on peut supposer que les inconnues u, v, w,..., ainsi que les limites de l'intégrale, dépendent toutes d'un paramètre arbitraire $\varkappa$, et qu'il faille trouver la valeur $\varkappa_0$ de ce paramètre qui fasse acquérir à l'intégrale S sa plus grande ou sa plus petite valeur. Puisque, dans cette hypothèse, l'intégrale S est elle-même fonction de $\varkappa$, la première condition du maximum ou du minimum sera

$$\Big|^{\varkappa_0} \frac{dS}{d\varkappa} = 0.$$

ou bien, en nous servant de la notation adoptée dans le calcul des variations,

$$(1) \qquad \delta S = 0.$$

Ainsi l'intégrale S ne pourra devenir un maximum ou

un minimum qu'autant que l'on donnera aux fonctions inconnues qu'il s'agit de déterminer des valeurs ou des formes telles, que la variation de l'intégrale s'évanouisse, quelques déformations que l'on fasse subir à ces mêmes fonctions, ou de quelque manière qu'on les fasse varier avec le paramètre $\varkappa$, à partir des valeurs ou des formes primitives dont il s'agit. Il faut en outre que la variation seconde $\delta^2 S$, pour toutes les déformations possibles, reste constamment soit positive, soit négative, sans devenir nulle, la valeur positive correspondant au minimum et la valeur négative au maximum de l'intégrale S.

Quelquefois la condition $\delta S = \infty$ peut aussi donner une solution du problème. Dans le cas, par exemple, où l'on cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y^2 - [f(x)]^2} . dx,$$

la condition $\delta S = 0$ donnerait $y = 0$, valeur inadmissible, puisqu'elle rend l'intégrale imaginaire, tandis que la condition $\delta S = \infty$ donne $y = \pm f(x)$, valeur qui correspond évidemment à un véritable minimum de l'intégrale. Si nous ne tenons pas compte de ces solutions singulières correspondantes à une valeur infinie de la variation δS, c'est qu'elles ne se présentent pas dans les applications ordinaires.

46. Lorsque les inconnues $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, u, v, w, \ldots$ ne sont assujetties à aucune restriction particulière, c'est-à-dire lorsqu'on cherche le maximum ou le minimum *absolu* de l'intégrale S, les variations

$$\delta x_1, \quad \delta x_2, \quad \delta y_1, \quad \delta y_2, \ldots, \quad \delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \ldots,$$

contenues dans δS, sont toutes complétement arbitraires, et l'équation $\delta S = 0$ doit subsister quelles que soient les

valeurs ou les formes qu'on leur attribue. Seulement on se rappellera que, par leur définition même, ces variations ne sauraient jamais contenir d'autres variables que celles qui entrent respectivement dans les fonctions

$$x_1,\quad x_2,\quad y_1,\quad y_2,\ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\ldots;$$

dans le cas actuel, δx_1, δx_2 seront donc des constantes arbitraires; δy_1, δy_2 des fonctions arbitraires de x; δz_1, δz_2 des fonctions arbitraires de x, y; etc., et δu, δv, δw,... des fonctions arbitraires de toutes les variables principales $x, y, z, \ldots, t$.

Mais le plus souvent la nature même du problème établit certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues, de sorte que leurs variations ne sont plus entièrement arbitraires ou indépendantes les unes des autres. On ramène ce second cas au premier, soit en faisant servir les équations de condition à l'élimination du plus grand nombre possible de variations, soit en introduisant de nouvelles inconnues, constantes ou variables, dont on puisse disposer à la fin du calcul pour satisfaire aux conditions du problème. Par cette élimination ou cette introduction de nouvelles inconnues, les variations qui entrent dans l'équation $\delta S = 0$ transformée redeviennent arbitraires et indépendantes les unes des autres.

Les conditions auxquelles on doit satisfaire dans la recherche des maxima et des minima *relatifs* sont de trois espèces : 1° des relations finies entre les diverses fonctions inconnues ou entre leurs valeurs limites; 2° des valeurs constantes imposées à certaines intégrales ou à certaines expressions définies; 3° l'obligation de vérifier certaines équations différentielles ou aux dérivées partielles. Nous allons considérer successivement ces trois espèces de conditions.

47. Toute relation finie de la forme

$$(2) \qquad F(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0$$

qui doit subsister dans l'étendue entière de l'intégrale proposée, détermine l'une des inconnues u, v, w, ... en fonctions des autres, et peut servir à l'éliminer de l'intégrale S toutes les fois qu'on sait résoudre l'équation $F = 0$. Mais alors même que cette résolution est impossible, la relation donnée conduit toujours à une équation linéaire entre les variations δu, δv, δw, ... au moyen de laquelle on peut en tout cas éliminer l'une de ces variations de l'équation $\delta S = 0$. En effet, si l'on prend la variation de $F = 0$, on trouvera $\delta F = 0$, ou

$$(3) \qquad \frac{dF}{du}\delta u + \frac{dF}{dv}\delta v + \frac{dF}{dw}\delta w + \ldots = 0.$$

Pour qu'on puisse mettre à profit cette dernière relation, il n'est pas même nécessaire que la fonction F soit donnée en termes finis; il suffirait évidemment de connaître sa différentielle totale ou seulement ses dérivées partielles relatives à u, v, w, ...

Si les fonctions inconnues étaient assujetties à vérifier plusieurs conditions semblables

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots,$$

on aurait

$$\delta F = 0, \quad \delta F_1 = 0, \quad \delta F_2 = 0, \ldots,$$

équations dont on pourrait disposer pour eliminer un nombre de variations δu, δv, δw, ... égal à celui des conditions données.

Si la relation $F = 0$ ne devait pas avoir lieu dans l'étendue entière de l'intégrale S, mais seulement à la limite de l'une des variables, par exemple, à la limite

inférieure de z, de sorte qu'on eût

$$(4) \qquad \int^{z_1} \mathrm{F}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0,$$

elle ne suffirait plus à l'élimination complète de l'une des fonctions u, v, w, . . . , ou de l'une des variations δu, δv, δw, . . . , mais elle fournirait toujours une relation linéaire entre les valeurs de ces variations correspondantes à la limite dont il s'agit et la variation δz_1 de cette limite, relation dont on pourrait disposer encore pour éliminer soit δz_1, soit la valeur limite de l'une des variations δu, δv, δw, ... En prenant la variation des deux membres de l'équation (4), on trouvera, en effet,

$$\int^{z_1} \left(\delta \mathrm{F} + \frac{d\mathrm{F}}{dz} \delta z \right) = 0,$$

ou, en développant $\delta \mathrm{F}$ et $\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}$,

$$(5) \quad \int^{z_1} \left[\frac{d\mathrm{F}}{du} \delta u + \frac{d\mathrm{F}}{dv} \delta v + \ldots + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dz} + \frac{d\mathrm{F}}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\mathrm{F}}{dv}\frac{dv}{dz} + \ldots \right) \delta z \right] = 0.$$

Il est inutile de rappeler que δz, ou la variation symbolique de la variable indépendante z, représente ici δz_1, ou la variation de la limite inférieure de z, en raison du signe de substitution qui l'affecte.

S'agit-il, par exemple, de déterminer la forme d'une courbe plane, jouissant d'une certaine propriété de maximum ou de minimum, et dont l'extrémité, correspondante à la limite inférieure de x, est assujettie à se trouver sur une ligne donnée par l'équation $y = f(x)$, la fonction inconnue y devant satisfaire à la condition

$$(6) \qquad \int^{x_1} [y - f(x)] = 0,$$

on aura, en prenant la variation, et considérant que cette fois y est une fonction inconnue de x,

$$(7) \qquad \int^{x_1} \{ \delta y + [y' - f'(x)] \delta x \} = 0,$$

y' étant la dérivée de y relative à la courbe cherchée. Dans ce cas on pourrait donc éliminer soit δx_1, soit la valeur limite de δy.

De même, s'il s'agit de déterminer dans l'espace une courbe dont l'extrémité doive se trouver sur une surface donnée, ayant pour équation $z = f(x, y)$, on devra avoir

$$(8) \qquad \int^{x_1} [z - f(x, y)] = 0,$$

et, par conséquent, puisque y et z sont des fonctions inconnues de x,

$$(9) \qquad \int^{x_1} \left[\delta z - \frac{df}{dy} \delta y + \left(z' - \frac{df}{dx} - \frac{df}{dy} \cdot y' \right) \delta x \right] = 0,$$

y' et z' étant les dérivées de y et de z relatives à la courbe cherchée. Dans ce cas on pourrait donc éliminer soit δx_1, soit la valeur limite de l'une des variations δy, δz.

Supposons encore qu'on veuille déterminer une surface courbe avec la condition que la partie de son contour correspondante à la limite inférieure de y, ou déterminée par l'équation $y = y_1$, soit comprise dans une surface donnée, ayant pour équation $z = f(x, y)$, on aura

$$(10) \qquad \int^{y_1} [z - f(x, y)] = 0;$$

et par suite, puisque z est une fonction inconnue de x, y,

$$(11) \qquad \int^{y_1} \left[\delta z + \left(q - \frac{df}{dy} \right) \delta y \right] = 0,$$

p, q étant des dérivées partielles de z relatives à la surface cherchée. Dans ce cas on pourrait éliminer soit la variation δy_1, soit la valeur limite de la variation δz.

48. Les conditions de la seconde espèce consistent en ce que certaines expressions définies, le plus souvent certaines intégrales S_1, S_2,..., doivent conserver des valeurs constantes c_1, c_2,..., c'est-à-dire que les valeurs ou les formes des fonctions inconnues ne doivent être choisies que parmi celles qui vérifient les équations $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2$, etc. Telle est, par exemple, dans le fameux problème des isopérimètres, la condition que l'arc de la courbe dont on cherche l'équation, ait une longueur donnée. Une condition de ce genre ne suffit pas à déterminer ou à éliminer l'une des fonctions inconnues; car il est une infinité de fonctions qui, substituées à celle sur laquelle portent les signes d'intégration et de substitution dans l'expression définie S_1, lui feraient prendre la même valeur constante c_1; c'est ce qu'on peut même affirmer en général de toute fonction renfermant une constante arbitraire à laquelle on donne une valeur convenable.

Dans ce cas, qui se présente très-fréquemment et qui cependant a été traité par les auteurs d'une manière assez peu rigoureuse, on tourne la difficulté par un artifice bien simple. Concevons pour un moment que chacune des fonctions inconnues renferme plusieurs paramètres $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$,..., indépendants les uns des autres, et dont le nombre soit égal à celui des expressions définies S, S_1, S_2,...; on pourra considérer ces expressions comme des fonctions de $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$,...,

$$S = \varphi(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots),$$
$$S_1 = \chi(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots),$$
$$S_2 = \psi(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et la question se réduira à trouver parmi toutes les valeurs de x, x', x'', ... qui satisfont aux conditions $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2, \ldots$, celles qui rendent S maximum ou minimum. On la résout, d'après les principes connus du calcul différentiel, en cherchant le maximum ou le minimum absolu de la somme

$$S + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots,$$

a_1, $a_2, \ldots$, étant des constantes indéterminées dont on dispose à la fin du calcul pour satisfaire aux conditions

$$S_1 = c_1, \quad S_2 = c_2.$$

On arriverait encore au même résultat en cherchant le maximum ou le minimum absolu de la somme

$$S + a_1 (S_1 - c_1) + a_2 (S_2 - c_2) + \ldots,$$

dans laquelle on fait varier avec le paramètre x non-seulement toutes les inconnues du premier problème, mais aussi les coefficients a_1, $a_2, \ldots$. En effet, la variation totale de cette somme

$$\delta S + a_1 \delta S_1 + a_2 \delta S_2 + \ldots + (S_1 - c_1)\delta a_1 + (S_2 - c_2)\delta a_2 + \ldots$$

devant être nulle pour toutes les valeurs des variations indépendantes qu'elle renferme, et parmi lesquelles se trouvent δa_1, $\delta a_2, \ldots$, on aura nécessairement

$$\delta S + a_1 \delta S_1 + a_2 \delta S_2 + \ldots = 0,$$
$$S_1 = c_1, \quad S_2 = c_2, \quad \ldots\ldots$$

La première de ces équations donne évidemment le maximum ou le minimum de $S + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots$, dans l'hypothèse précédemment admise, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques mais *invariables* de a_1, $a_2, \ldots$, les autres exigent que ces valeurs soient précisément celles qui vérifient les conditions primitives du problème.

Au reste, puisque la somme $S + a_1 (S_1 - c_1) + \ldots$ ne

peut être un maximum ou un minimum absolu sans que l'on n'ait $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2, \ldots$, c'est-à-dire sans que la somme se réduise à son premier terme S, il est évident que les valeurs des inconnues $u, v, w, \ldots, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots$, correspondantes à ce maximum ou minimum absolu, sont parmi toutes les valeurs qui remplissent les conditions $S_1 = c_1$, $S_2 = c_2, \ldots$, celles qui donnent à l'intégrale S sa plus grande ou sa plus petite valeur. Ainsi le dernier problème revient identiquement au premier, sauf qu'il conduit en outre à déterminer certaines quantités $a_1, a_2, \ldots$, étrangères à la question primitive.

49. Il reste à considérer les conditions de la troisième espèce. Admettons que les fonctions $u, v, w, \ldots$, et leurs dérivées de divers ordres soient liées entre elles par une équation

$$U = 0.$$

Les variations δu, δv, $\delta w, \ldots$ et leurs dérivées seront de même liées entre elles par l'équation

$$\delta U = 0;$$

cependant, toutes les fois qu'on ne pourra pas remonter de ces équations différentielles ou aux dérivées partielles aux équations en termes finis dont elles dérivent, elles ne pourront pas servir à l'élimination de l'une des fonctions inconnues ou de l'une des variations. Mais il est toujours facile de ramener ce cas à celui que nous venons d'examiner. En effet l'équation $U = 0$, qui a lieu dans toute l'étendue de l'intégrale S, entraîne nécessairement la suivante

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \ldots \mu^2 U^2 \ldots dz\,dy\,dx = 0$$

μ étant une fonction arbitraire de $x, y, z, \ldots$, et, réciproquement, celle-ci ne peut avoir lieu sans que l'on ait

$U = 0$. L'équation $T = 0$ équivaut donc à la condition donnée $U = 0$ et peut la remplacer identiquement. Cela posé, il suffira, comme dans le cas précédent, de chercher le maximum ou le minimum absolu de la somme $S + aT$, ou, ce qui revient au même, de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots(V+\lambda U)\ldots dz\,dy\,dx,$$

dans laquelle on représente par λ la fonction $a\mu^2 U$ dont la forme peut varier arbitrairement avec z. Ce problème résolu donnera non-seulement les valeurs de x_1, x_2, y_1, $y_2, \ldots$, u, v, $w, \ldots$ qui conviennent au maximum ou au minimum relatif de l'intégrale S; il déterminera en outre la fonction λ, qui n'entrait pas dans la question primitive.

On arrivera au même résultat si l'on cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int\int\int\ldots(V+\lambda U)\ldots dz\,dy\,dx,$$

en regardant λ comme une fonction inconnue mais *invariable*, pourvu qu'on la détermine à la fin du calcul de manière à remplir la condition $U = 0$. En effet, pour résoudre le problème dans le cas où λ change de forme, il faut égaler à zéro la variation de l'intégrale

$$\int\int\int\ldots(V+\lambda U)\ldots dz\,dy\,dx,$$

et l'équation qui en résulte doit être vérifiée pour toutes les valeurs de $\delta\lambda$. Or $\int\int\int\ldots U\delta\lambda\ldots dz\,dy\,dx$ est le seul terme de cette équation qui contienne $\delta\lambda$; on devra donc avoir, et cette conclusion sera bientôt justifiée, $U = 0$. Les autres termes de l'équation dont il s'agit sont les mêmes que dans l'hypothèse où λ est invariable de forme; ainsi il suffira de chercher le maximum ou le minimum de l'intégrale $\int\int\int\ldots(V+\lambda U)\ldots dz\,dy\,dx$ dans

cette dernière hypothèse et de déterminer ensuite λ par la condition $U = 0$, ainsi que nous l'avions avancé.

Si dans la recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale S on avait à remplir plusieurs conditions semblables

$$U = 0, \quad U_1 = 0, \ldots,$$

il suffirait de chercher le maximum ou le minimum absolu de

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\cdots(V + \lambda U + \lambda_1 U_1 + \ldots)\ldots dz\,dy\,dx,$$

$\lambda, \lambda_1, \ldots$ étant de nouvelles fonctions à formes variables. On pourrait même regarder $\lambda, \lambda_1, \ldots$ comme invariables de forme, et se réserver le droit d'en disposer à la fin du calcul de manière à vérifier les équations

$$U = 0, \quad U_1 = 0, \ldots.$$

Il est facile de voir qu'on pourrait traiter de la même manière les conditions de première espèce (n° 47). Cela est évident pour le cas où l'équation

$$F(x, y, z, \ldots, u, v, \ldots) = 0$$

doit avoir lieu dans toute l'étendue de l'intégrale S. Mais si cette équation n'avait lieu qu'à la limite d'une des variables, de sorte qu'on eût, par exemple,

$$\Big|^{y_1} F = 0,$$

on la remplacerait par la condition équivalente

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\int_{z_1}^{z_2}\ldots\mu^2 F^2\ldots dz\,dx = 0,$$

μ étant une fonction arbitraire de $x, y, z, \ldots$, et le problème, en vertu de ce qui précède, serait ramené à la

recherche du maximum ou du minimum absolu de la somme

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots \mathrm{V}\ldots dzdydx + \int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\int_{z_1}^{z_2}\ldots\lambda\mathrm{F}\ldots dzdx,$$

dans laquelle on est libre de regarder la fonction λ, représentant le produit de $\mu^2 \mathrm{F}$ par une constante indéterminée, comme variable ou invariable de forme; dans le dernier cas, il resterait à déterminer la valeur de λ par la condition $\mathrm{F}=0$, qui doit avoir lieu à la limite de y.

50. Il reste donc acquis que, dans tous les cas, le problème se ramène à la recherche du maximum ou du minimum absolu d'une expression définie ou d'une somme Σ de plusieurs expressions définies, et que sa solution dépend en définitive d'une équation

$$\delta\Sigma = 0,$$

dans laquelle les variations de toutes les inconnues sont indépendantes les unes des autres. Supposons actuellement que par les procédés indiqués on ait donné à $\delta\Sigma$ une forme telle, que les dérivées des variations ne soient plus prises relativement aux variables d'intégrations; supposons de plus qu'après avoir décomposé les signes de substitution double en signes de substitution simple, on ait réuni en un seul terme tous ceux qui renferment la même dérivée de la même variation sous les mêmes signes de substitution et d'intégration; le premier membre de l'équation $\delta\Sigma = 0$ sera en général la somme de plusieurs termes ou expressions définies, dont chacun contient une seule variation ou sa dérivée, et se distingue de tous les autres soit par cette dérivée même, soit par les substitutions et les intégrations qui lui sont propres. Donc si l'on égale successivement à zéro toutes les variations à

l'exception d'une seule, on aura une série d'équations dont chacune renferme une seule variation avec ses dérivées, et doit se vérifier quelle que soit la valeur ou la forme de cette variation.

Considérons en particulier une de ces équations

$$W = 0,$$

ne renfermant que la variation δu avec ses dérivées. Le seul terme qui ne soit pas affecté de substitution est nécessairement de la forme

$$(A) \qquad \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots M\delta u\ldots dz\,dy\,dx;$$

tous les autres renfermeront un ou plusieurs signes de substitution; et nous rappellerons dès à présent que les substitutions peuvent se faire immédiatement, ou avant les intégrations, à la condition qu'on les fera une seconde fois dans les limites des intégrations (n° 5).

Cela posé, faisons avec M. Sarrus

$$\omega = (x - x_1)(x - x_2)(y - y_1)(y - y_2)(z - z_1)(z - z_2)\ldots,$$

et posons pour un instant

$$\delta u = M\omega^{2n},$$

n étant un nombre assez grand pour que toutes les dérivées de δu renfermées dans W aient encore ω en facteur. Puisque ω s'annule chaque fois que l'on donne à l'une quelconque des variables x, y, z, ... sa valeur limite inférieure ou supérieure, les termes de W affectés de signes de substitution s'évanouiront tous; il ne restera que le seul terme (A), qui devra être nul séparément et qui donne

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\ldots(M\omega^n)^2\ldots dz\,dy\,dx = 0,$$

équation impossible à moins que $M\omega^n$ ne soit constamment égal à zéro. Or évidemment le facteur ω ne peut pas être nul dans les limites de l'intégrale ; il faudra donc que l'on ait dans toute cette étendue

$$M = 0.$$

Cette première condition à laquelle doivent satisfaire les inconnues du problème, fait disparaître le terme (A) quel que soit δu ; et l'équation $W = 0$ est remplacée par une autre

$$W_1 = 0,$$

dont tous les termes sont affectés d'un ou de plusieurs signes de substitution, et dans laquelle δu est encore entièrement arbitraire.

51. Les termes de cette seconde équation $W_1 = 0$ qui ne renferment qu'un seul et même signe de substitution, relatif, par exemple, à la limite inférieure de y, seront tous de la forme

$$\text{(B)} \qquad \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots N \frac{d^m \delta u}{dx^m} \cdots dz\, dx.$$

Admettons que celui des termes dans lequel la dérivée de δu est de l'ordre le plus élevé m', soit

$$\text{(B')} \qquad \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots N' \frac{d^{m'} \delta u}{dy^{m'}} \cdots dz\, dx ;$$

faisons, pour abréger,

$$\omega_1 = \frac{\omega}{y - y_1} = (x - x_1)(x - x_2)(y - y_2)(z - z_1)(z - z_2)\ldots,$$

et posons pour un instant

$$\delta u = N' \omega_1^{2n} \frac{(y - y_1)^{m'}}{1.2.3\ldots m'},$$

n étant un nombre entier assez grand pour que chaque dérivée de δu qui se trouve dans l'équation $W_1 = 0$, contienne ω_1 en facteur. Tous les termes de W_1 non compris dans la forme (B), ou affectés d'un signe de substitution autre que $\Big|^{y_1}$, disparaîtront avec le facteur ω_1; de plus les termes compris sous la forme (B), mais dans lesquels la dérivée de δu est d'un ordre inférieur à m', disparaîtront avec le facteur $y - y_1$; il ne restera que le seul terme (B') qui, devant être nul lui-même, pour que l'équation $W_1 = 0$ soit vérifiée, donne

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \ldots (N'\omega_1^n)^2 \ldots dz\, dx = 0,$$

et cette équation évidemment ne peut avoir lieu qu'autant que l'on ait

$$\Big|^{y_1} N'\omega_1^n = 0$$

dans toute l'étendue des intégrations, c'est-à-dire entre les limites x_1 et x_2 de x, $\Big|^{y_1} z_1$ et $\Big|^{y_1} z_2$ de z, etc. Or le facteur

$$\Big|^{y_1} \omega_1,$$

ou

$$(x - x_1)(x - x_2)(y_1 - y_2)\left(z - \Big|^{y_1} z_1\right)\left(z - \Big|^{y_1} z_2\right)\ldots,$$

ne peut pas s'évanouir entre ces limites; il faut donc qu'on ait constamment

$$\Big|^{y_1} N' = 0,$$

seconde condition à laquelle devront satisfaire les fonctions inconnues, et qui fera disparaître le terme (B′) indépendamment de toute valeur ou forme particulière assignée à δu. On a donc le droit de supprimer ce terme dans W_1, et comme après cette suppression l'équation $W_1 = 0$ devra encore être vérifiée quel que soit δu, on pourra répéter le même raisonnement et prouver : 1° que chaque terme de la forme (B) renfermant un seul signe de substitution relatif à y, fournira séparément une équation de condition qui le fera disparaître ; 2° qu'il en sera de même pour tous les termes de W_1 renfermant un seul signe de substitution relatif à une variable quelconque, et que par conséquent l'équation $W_1 = 0$ se réduit à une nouvelle équation

$$W_2 = 0,$$

dont chaque terme est affecté de deux signes au moins de substitution, et dans laquelle δu reste encore entièrement arbitraire.

52. Tous les termes de l'équation $W_2 = 0$ qui ne renferment que deux signes de substitution déterminés, par exemple $\Big|^{x_2}$ et $\Big|^{y_1}$, ont nécessairement la forme

$$\text{(C)} \qquad \Big|^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \mathrm{P} \frac{d^{l+m} \delta u}{dx^l \, dy^m} \cdots dz.$$

Choisissons dans ce groupe les termes pour lesquels l a sa plus grande valeur l', et parmi ces derniers le terme

$$\text{(C')} \qquad \Big|^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots \mathrm{P}' \frac{d^{l'+m'} \delta u}{dx^{l'} \, dy^{m'}} \cdots dz,$$

dans lequel m a sa plus grande valeur m' ; faisons, pour

abréger,

$$\omega_2 = \frac{\omega}{(x-x_2)(y-y_1)} = (x-x_1)(y-y_2)(z-z_1)(z-z_2)\ldots,$$

et posons pour un instant

$$\delta u = \mathrm{P}'\omega_2^{2n} \cdot \frac{(x-x_2)^{l'}(y-y_1)^{m'}}{1.2.3\ldots l' \times 1.2.3\ldots m'},$$

n étant un nombre entier assez grand pour que toutes les dérivées de δu qui entrent dans W_2, contiennent encore ω_2 en facteur. Tous les termes de W_2 qui ne sont pas compris dans le groupe (C) ou qui renferment d'autres signes de substitution que ceux relatifs à x_2, y_1, disparaîtront avec ω_2; dans ce groupe, en outre, chaque terme qui contient une dérivée de δu relative à x d'ordre inférieur à l' disparaîtra avec $x - x_2$, et chaque terme renfermant une dérivée de δu relative à y d'ordre inférieur à m' disparaîtra avec $y - y_1$; il ne restera donc que le seul terme (C'), devenu

$$\Big|^{x_2} \Big|^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \cdots (\mathrm{P}'\omega_2^n)^2 \cdots dz,$$

et pour que l'équation $\mathrm{W}_2 = 0$ soit vérifiée, il faudra que cette dernière expression soit elle-même nulle, ou que l'on ait

$$\Big|^{x_2} \Big|^{y_1} \mathrm{P}'\omega_2^n = 0$$

dans toute l'étendue des intégrations, c'est-à-dire entre les limites $\Big|^{x_2} \Big|^{y_1} z_1$ et $\Big|^{x_2} \Big|^{y_1} z_2$ de z, etc. Mais cette fois encore $\Big|^{x_2} \Big|^{y_1} \omega_2$ ne devient pas nul entre ces limites; il

faudra donc que l'on ait

$$\int^{x_2}\int^{y_1} P' = 0,$$

nouvelle relation entre les inconnues du problème qui fait disparaître le terme (C') quel que soit δu. Ce terme supprimé, l'équation $W_2 = 0$ devra encore être vérifiée pour toutes les valeurs ou formes de δu. En appliquant de nouveau le même raisonnement, on est successivement conduit à égaler à zéro les coefficients de δu et de ses dérivées dans tous les termes renfermant deux signes de substitution seulement, ce qui réduira l'équation W_2 à une nouvelle équation

$$W_3 = 0,$$

dont chaque terme renferme au moins trois signes de substitution et dans laquelle δu reste encore arbitraire. En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes de l'équation $W = 0$, et étendant les mêmes raisonnements à toutes les variations indépendantes contenues dans l'équation primitive $\delta\Sigma = 0$, on arrive enfin aux conclusions suivantes :

Pour trouver toutes les relations qui doivent exister entre les inconnues du problème en vertu de l'équation $\delta\Sigma = 0$: 1° *on réunira en un seul terme toutes les expressions définies qui dans* $\delta\Sigma$ *renferment la même dérivée d'une même variation sous les mêmes signes de substitution ;* 2° *on égalera à zéro le coefficient de cette dérivée dans chaque terme : on obtiendra ainsi autant d'équations qu'il y a de termes, chacune de ces équations devant être vérifiée dans l'étendue entière du terme qui lui a donné naissance, c'est-à-dire pour toutes les valeurs des variables* $x, y, z, \ldots$, *déterminées par les substitutions ou comprises entre les limites des intégrations dans le terme dont il s'agit.*

Par exemple, le terme

$$(\mathrm{K}) \qquad \int_{x_1}^{x_2}\int^{y_2}\int^{z_1}\cdots\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{R}\,\theta\,dt\ldots dx,$$

que nous supposons faire partie de $\delta\Sigma$ et dans lequel θ représente soit la variation δu de l'une des inconnues u, soit une dérivée quelconque de δu relative aux variables de substitution, fera naître l'équation

$$\int^{y_2}\int^{z_1}\cdots \mathrm{R} = 0,$$

qui doit subsister dans toute l'étendue des intégrations.

53. Jusqu'ici nous avons supposé que les inconnues et leurs variations étaient fonctions de toutes les variables $x, y, z, \ldots, t$, et il peut arriver, au contraire, qu'elles ne dépendent que de quelques-unes de ces variables. Dans ce cas, la règle que nous venons d'énoncer a besoin d'une légère modification. Admettons, pour rester dans l'exemple choisi, que θ soit une fonction arbitraire de x, y, mais qu'elle ne doive pas renfermer d'autres variables, et faisons, pour abréger,

$$\mathrm{R}' = \int^{z_1}\cdots\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{R}\,dt\ldots;$$

le terme (K) pourra s'écrire

$$\int_{x_1}^{x_2}\int^{y_2} \mathrm{R}'\,\theta\,dx,$$

le nouveau coefficient R' étant fonction des seules variables x, y; on reviendra ainsi au cas précédent, et il faudra encore que l'on ait

$$\int^{y_2}\mathrm{R}' = \int^{y_2}\int^{z_1}\cdots\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{R}\,dt\ldots = 0$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_1 et x_2.

En général, lorsqu'une inconnue ne dépend pas de quelques-unes des variables, on fera sortir sa variation et les dérivées de sa variation des signes $|$ et $\int$ relatifs à ces variables et l'on appliquera ensuite la règle du numéro précédent.

54. Il peut arriver que dans une des expressions définies qui composent la variation $\delta\Sigma$, les deux limites d'une intégration coïncident par suite des substitutions qu'on aura faites; il peut arriver encore que deux expressions définies ne différant l'une de l'autre que par les limites accolées aux signes de substitution,

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \Big|^{z_2} \ldots R\theta \ldots dx - \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \Big|^{z_1} \ldots R\theta \ldots dx,$$

par exemple, se détruisent par la coïncidence des valeurs substituées, ou par la relation

$$\Big|^{y_1} z_1 = \Big|^{y_1} z_2.$$

Dans ces deux cas, évidemment, les termes ou expressions définies dont il s'agit s'évanouiront identiquement sans fournir aucune équation de condition entre les fonctions inconnues et les variables indépendantes.

55. La règle énoncée n° 52 revient à dire que, dans l'expression de $\delta\Sigma$, ordonnée comme elle doit l'être, on peut regarder les variations et leurs dérivées contenues dans les différents termes comme des quantités arbitraires et indépendantes les unes des autres. Nous savons d'ailleurs que les valeurs limites des variations et de leurs dérivées sont liées aux variations des valeurs limites des

fonctions inconnues et de leurs dérivées par des relations simples et linéaires, d'où il suit qu'on pourrait encore regarder ces dernières variations comme arbitraires et indépendantes les unes des autres. Donc, si l'on avait introduit, au moyen des relations dont il s'agit, les variations des valeurs limites, et qu'on eût ordonné $\delta\Sigma$ par rapport à elles, de manière que chaque terme renfermât la variation soit d'une inconnue, soit de la valeur limite d'une inconnue ou de sa dérivée prise toujours par rapport à une ou plusieurs variables de substitution, on trouverait encore les diverses conditions du maximum ou du minimum, en égalant à zéro le coefficient de la variation pour chaque terme séparément. Seulement si, par sa nature même, la variation était indépendante de certaines variables, on devrait la faire sortir des signes de substitution et d'intégration relatifs à ces variables, avant d'appliquer la règle. Cette règle pourrait d'ailleurs se déduire facilement du principe qu'on peut assujettir une fonction indéterminée u à conserver des valeurs fixes quelconques aux limites de certaines variables, tout en la faisant varier arbitrairement entre ces limites. Mais nous croyons inutile d'entrer dans les détails d'une nouvelle démonstration; il nous suffira d'avoir donné cette indication d'une manière générale.

Pour faire disparaître ce qui semblerait peut-être un peu vague dans ces considérations abstraites, et pour établir en même temps des formules générales dont nous ferons plus tard des applications particulières, nous allons chercher successivement les conditions du maximum ou du minimum des intégrales simples, doubles et triples, en discutant pour chacune d'elles les diverses restrictions relatives aux limites qui peuvent se présenter.

SIXIÈME LEÇON.

Maxima et minima des intégrales simples, renfermant une seule fonction inconnue. — Absence de maximum et de minimum absolu. — Diverses hypothèses ou restrictions relatives aux limites. — Cas où l'équation indéfinie s'intègre immédiatement. — Cas exceptionnel où il y a plus d'équations que d'inconnues. — Cas où les valeurs limites de x, y, y',..., entrent dans la fonction à intégrer. — Maxima et minima des intégrales simples renfermant deux fonctions inconnues.

---

56. I. *On cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale*

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

dans laquelle

$$V = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

y étant une fonction inconnue de x, et $y', y'', \ldots$, ses dérivées successives.

La variation de cette intégrale (n° 32), ordonnée comme elle doit l'être (n° 50), comprend les termes suivants :

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_1}^{x_2} (P)\,\delta y\, dx$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} &+\Big|^{x_2}(P_1)\,\delta y + \Big|^{x_2}(P_2)\,\frac{d\,\delta y}{dx} + \ldots + \Big|^{x_2}(P_n)\,\frac{d^{n-1}\,\delta y}{dx^{n-1}} \\ &-\Big|^{x_1}(P_1)\,\delta y - \Big|^{x_1}(P_2)\,\frac{d\,\delta y}{dx} - \ldots - \Big|^{x_1}(P_n)\,\frac{d^{n-1}\,\delta y}{dx^{n-1}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \qquad +\Big|^{x_2} V\,\delta x_2 - \Big|^{x_1} V\,\delta x_1.$$

En égalant à zéro le premier terme, on trouve d'abord l'équation *indéfinie* (P) = o, ou

$$(1) \qquad P - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^nP_n}{dx^n} = 0,$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_1 et x_2. Cette équation différentielle, qui est en général de l'ordre $2n$ ou contient les dérivées de y jusqu'à $y^{(2n)}$, donnera par l'intégration la valeur de y en fonction de x et de $2n$ constantes arbitraires.

Les termes (II), égalés à zéro, fourniront à leur tour $2n$ équations *aux limites* :

$$(2) \qquad \begin{cases} \Big|^{x_1}(P_1) = 0, & \Big|^{x_1}(P_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_1}(P_n) = 0, \\ \Big|^{x_2}(P_1) = 0, & \Big|^{x_2}(P_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_2}(P_n) = 0, \end{cases}$$

auxquelles on joindra les deux équations

$$(3) \qquad \Big|^{x_1} V = 0, \quad \Big|^{x_2} V = 0,$$

qui doivent leur existence aux termes (III).

Telles sont les diverses conditions du maximum ou du minimum *absolu* de l'intégrale S. On satisfera aux équations (2) au moyen des $2n$ constantes arbitraires contenues dans la valeur générale de y, et ces constantes se trouveront ainsi déterminées ou exprimées en fonctions des limites x_1, x_2. Il ne restera alors qu'à déterminer ces limites, et il semble au premier abord qu'on puisse le faire au moyen des deux dernières équations (3). Mais si l'on considère plus attentivement la forme de ces équations, on verra que dans le cas actuel elles ne conduiraient à aucun résultat utile. En effet, comme les équations (2), qui servent

à l'élimination des $2n$ constantes arbitraires, forment deux séries composées la première en x_1, comme la seconde l'est en x_2, ces deux limites entreront de la même manière dans la valeur définitive de y, qui sera nécessairement symétrique par rapport à x_1 et x_2. Il en sera de même de la fonction V, d'où l'on conclura que si l'une des équations (3) prend la forme $f(x_1, x_2) = 0$, l'autre sera $f(x_2, x_1) = 0$. Résolues tour à tour par rapport à x_1 et x_2, ces deux équations donneraient donc la même valeur, ou $x_1 = x_2$, ce qui rendrait l'intégrale S nulle quelle que fût la fonction y; et dès lors, évidemment, il ne pourrait plus être question ni de maximum, ni de minimum. C'est du reste à quoi l'on devait s'attendre; car si la fonction y et les limites x_1, x_2 peuvent se déformer en même temps, sans être assujetties à aucune restriction, il est clair que l'intégrale proposée pourra elle-même croître ou décroître indéfiniment, et qu'il n'y aura plus lieu à chercher sa valeur maxima ou minima. L'analyse et le raisonnement s'accordent donc à montrer que le problème n'aura de solution qu'autant que les valeurs limites de quelques-unes des quantités $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ seront données ou assujetties à remplir certaines conditions. Ces conditions ou restrictions relatives aux limites peuvent être très-diverses ou formulées de plusieurs manières; le plus souvent elles rentrent dans l'une des hypothèses suivantes.

57. 1° *Les limites de l'intégration x_1, x_2 sont données.* — En vertu de cette restriction, on a $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$; les termes (III) sont identiquement nuls et les équations (3) n'ont plus lieu. La solution du problème dépend alors de l'équation indéfinie (1), qui donne la valeur de y avec $2n$ constantes arbitraires, et des $2n$ équations aux limites (2) qui servent à déterminer ces constantes.

2° *On a donné les limites x_1, x_2 et en outre les valeurs limites de quelques-unes des fonctions y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$.* — Par la même raison que dans l'hypothèse précédente, les équations (3) n'existent plus. Il résulte d'ailleurs des équations (2), n° 33, que dans le cas où $\delta x_1 = \delta x_2 = 0$, les valeurs limites des variations

$$\delta y, \quad \frac{d\delta y}{dx}, \quad \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots,$$

coïncident respectivement avec les variations des valeurs limites de

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots,$$

lesquelles seront nulles, si ces valeurs limites doivent rester fixes. Or c'est ce que nous supposons avoir lieu pour quelques-unes d'entre elles ; donc aussi les valeurs limites de quelques-unes des variations $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \ldots,$ seront nulles, ce qui fera disparaître un certain nombre des termes (II) et celles des équations (2) qui leur correspondent. Mais ces équations seront remplacées par les conditions mêmes qui assignent à quelques-unes des fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ des valeurs limites déterminées, conditions dont le nombre est toujours égal à celui des équations disparues. Ces conditions primitives, jointes à celles des équations (2) qui restent, suffiront donc encore à déterminer les $2n$ constantes arbitraires.

Supposons, par exemple, qu'on ait donné ou rendu fixes la limite x_1 et les valeurs limites correspondantes de y, y', de sorte qu'on ait

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta\Big|^{x_1} y = 0, \quad \delta\Big|^{x_1} y' = 0;$$

on aura en même temps

$$\int^{x_1} \delta y = 0, \quad \int^{x_1} \frac{d\,\delta y}{dx} = 0;$$

par suite les deux premiers termes (II) relatifs à x_1 sont identiquement nuls et les deux premières équations (2) n'ont plus lieu ; mais elles se trouvent remplacées de fait par les conditions de fixité des valeurs limites de y et de y'.

3° *Les valeurs limites de quelques-unes des fonctions* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *sont fixes et données, sans que les limites* x_1, x_2, *soient déterminées.* — Supposons qu'on ait donné les valeurs de y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ correspondantes à la limite inférieure x_1. Les variations de ces valeurs fixes étant nulles, les relations (2) du n° 33 deviennent

$$\int^{x_1} \delta y = -\int^{x_1} y' \,\delta x_1, \quad \int^{x_1} \frac{d\,\delta y}{dx} = -\int^{x_1} y'' \,\delta x_1, \ldots,$$

$$\int^{x_1} \frac{d^{n-1}\,\delta y}{dx^{n-1}} = -\int^{x_1} y^{(n)} \,\delta x_1.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les n termes (II) relatifs à x_1, ces termes ramenés à ne plus contenir que la variation δx_1 se réuniront au second terme (III) dans une seule expression définie

$$-\int^{x_1} [\mathrm{V} - (\mathrm{P}_1)\, y' - (\mathrm{P}_2)\, y'' - \ldots - (\mathrm{P}_n)\, y^{(n)}]\, \delta x_1,$$

et ne fourniront plus qu'une seule équation

$$(4) \qquad \int^{x_1} [\mathrm{V} - (\mathrm{P}_1)\, y' - (\mathrm{P}_2)\, y'' - \ldots - (\mathrm{P}_n)\, y^{(n)}] = 0,$$

laquelle se joindra aux n conditions de fixité pour rem-

placer les n premières équations (2) et la première équation (3).

Si l'on avait fixé seulement les valeurs limites inférieures de y, y', les deux premières équations (2) et la première équation (3) seraient remplacées par l'équation unique

$$\int^{x_1}[\mathrm{V}-(\mathrm{P}_1)y'-(\mathrm{P}_2)y'']=0,$$

à laquelle on ajouterait les deux conditions qui assignent à y, y' des valeurs limites déterminées.

4° *Les valeurs limites de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ sont liées entre elles par des relations données.* — Soit

$$(5) \qquad \int^{x_1} \mathrm{f}[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}] = 0$$

une condition à laquelle doivent satisfaire les valeurs limites de x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$. En prenant la variation et désignant, pour abréger, par f' la dérivée totale de f relative à x, ou posant

$$\mathrm{f}' = \frac{d\mathrm{f}}{dx} + \frac{d\mathrm{f}}{dy}y' + \frac{d\mathrm{f}}{dy'}y'' + \ldots + \frac{d\mathrm{f}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)},$$

on trouve (n° 30)

$$(6) \int^{x_1}\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{f}}{dy'}\frac{d\delta y}{dx} + \ldots + \frac{d\mathrm{f}}{dy^{(n-1)}}\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} + \mathrm{f}'.\delta x_1\right) = 0,$$

équation dont on peut se servir pour éliminer des $n+1$ termes (II) et (III) relatifs à x_1, soit δx_1, soit la valeur limite de l'une des variations $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}$. Dès lors ces termes ne fourniront que n équations qui, jointes

à la condition primitive (5), remplaceront les n premières équations (2) et la première équation (3).

Admettons, par exemple, qu'à la limite inférieure de l'intégrale, y doive coïncider avec une fonction connue $f(x)$, de sorte que l'on ait

$$(7) \qquad \int^{x_1} [y - f(x)] = 0,$$

et, par suite,

$$\int^{x_1} \{\delta y + [y' - f'(x)]\delta x_1\} = 0;$$

les deux termes

$$-\int^{x_1} (P_1)\,\delta y - \int^{x_1} V\delta x_1$$

ne contiendront plus qu'une seule variation indépendante et s'uniront pour fournir une seule équation

$$(8) \qquad \int^{x_1} \{V - [y' - f'(x)](P_1)\} = 0,$$

laquelle, jointe à la condition (7), remplacera la première équation (2) et la première équation (3).

Quelles que soient les restrictions auxquelles on assujettisse les limites x_1, x_2 et les valeurs limites de la fonction y et de ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, on a en général autant d'équations que d'inconnues, et à moins qu'il n'arrive par des suppositions particulières que ces équations deviennent équivalentes ou incompatibles, elles suffiront toujours pour déterminer la fonction y avec ses $2n$ constantes arbitraires, et les limites x_1, x_2 de l'intégrale.

58. Au lieu d'éliminer immédiatement une ou plusieurs variations, comme nous l'avons fait dans ce qui

précède, on pourrait tenir compte d'une restriction quelconque $\int_{x_1}^{x_2} U = 0$, dans laquelle U est fonction de $x, y, y', y'', \ldots$, en introduisant un facteur indéterminé (n° 48), c'est-à-dire en cherchant le maximum ou le minimum absolu de la somme

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx + a \int_{x_1}^{x_2} U.$$

Il faudrait alors ajouter à la variation déjà calculée de l'intégrale ou du premier terme, celle du second terme

$$\delta . a \int_{x_1}^{x_2} U = a \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dy'} \frac{d\delta y}{dx} + \ldots + U' \delta x \right\},$$

U' étant la dérivée totale de U relative à x,

$$U' = \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} y' + \frac{dU}{dy'} y'' + \ldots,$$

et égaler à zéro la somme des deux variations, ce qui donnerait : 1° la même équation indéfinie $(P) = 0$ qu'auparavant, 2° les équations aux limites

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \int^{x_1} \left[(P_1) + a \frac{dU}{dy} \right] = 0, & \int^{x_2} \left[(P_1) + a \frac{dU}{dy} \right] = 0, \\ \int^{x_1} \left[(P_2) + a \frac{dU}{dy'} \right] = 0, & \int^{x_2} \left[(P_2) + a \frac{dU}{dy'} \right] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \int^{x_1} (V + aU') = 0, & \int^{x_2} (V + aU') = 0. \end{array} \right.$$

Si U ne renferme les dérivées de y que jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, ces équations aux limites seront en nombre $2n + 2$, et suffiront généralement à déterminer

les $2n$ constantes introduites par l'intégration, et les limites x_1, x_2. Quant à la nouvelle constante a, on en disposera pour satisfaire à la condition $\int_{x_1}^{x_2} U = 0$. Mais lorsque l'ordre des dérivées de y, contenues dans U, excède $n - 1$, on aura plus d'équations aux limites que de constantes à déterminer, et le problème ne sera plus possible, si ce n'est dans des cas exceptionnels et très-particuliers. Donc, en général, pour qu'une intégrale $S = \int V dx$ ait un maximum ou un minimum, il faut avant tout que les restrictions auxquelles on assujettit les valeurs limites de y et de ses dérivées successives, n'atteignent pas la dernière des dérivées contenues dans V, ni celles qui la suivent.

59. Il est des cas où l'équation indéfinie (1) peut s'intégrer une ou plusieurs fois sans qu'on ait besoin de connaître ou de déterminer complétement la forme de la fonction V. Il suffit, en effet, de savoir qu'elle ne renferme pas la première, ou les deux premières, ou les trois premières, etc., des fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ pour qu'on puisse effectuer immédiatement une, deux, trois, etc., intégrations successives. Supposons, par exemple, que V ne renferme pas y, mais seulement ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Puisque alors la dérivée partielle $\frac{dV}{dy} = P$ est nulle, l'équation (1) devenue

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \ldots \mp \frac{d^n P_n}{dx^n} = 0,$$

s'intègre immédiatement et donne

$$P_1 - \frac{dP_2}{dx^2} + \ldots \mp \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} = c_1, \quad \text{ou} \quad (P_1) = c_1.$$

Si V ne contient pas non plus y', la dérivée partielle

$\frac{dV}{dy'} = P_1$ est aussi nulle ; et l'on peut intégrer une seconde fois, ce qui donne

$$P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \ldots \pm \frac{d^{n-2}P_n}{dx^{n-2}} = c_2 - c_1 x, \quad \text{ou} \quad (P_2) = c_2 - c_1 x.$$

En général, si les m premières des fonctions y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ n'entrent pas dans l'expression V, les m dérivées partielles P, P_1, P_2, ..., P_{m-1} et, par conséquent, les m premiers termes de l'équation (1) seront nuls ; on pourra donc intégrer m fois de suite, ce qui donnera successivement

$$(10)\quad \begin{cases} (P_1) = c_1, \\ (P_2) = c_2 - c_1 \frac{x}{1}, \\ (P_3) = c_3 - c_2 \frac{x}{1} + c_1 \frac{x^2}{1.2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (P_m) = c_m - c_{m-1}\frac{x}{1} + c_{m-2}\frac{x^2}{1.2} - \ldots \pm c_1 \frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}. \end{cases}$$

Le résultat définitif de ces intégrations, ou l'équation différentielle

$$(11)\quad (P_m) = c_m - c_{m-1}\frac{x}{1} + \ldots \pm c_1 \frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

dans laquelle, d'après les notations admises, (P_m) représente

$$P_m - \frac{dP_{m+1}}{dx} + \ldots \pm \frac{d^{n-m}P_n}{dx^{n-m}},$$

ne renfermera évidemment que les dérivées de y jusqu'à $y^{(2n-m)}$ inclusivement ; l'ordre de l'équation primitive (1) sera donc abaissé de m unités.

Il se présente ici une particularité que nous devons faire

connaître. Si les valeurs limites des fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$, qui ont disparu de V, ne sont assujetties à aucune restriction, le problème reste en partie indéterminé. Substituant, en effet, les valeurs (10) de $(P_1), (P_2), \ldots, (P_m)$, dans les m premières équations (2) pour en déduire les valeurs des constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_m$, on trouve

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0,$$

valeurs qui rendent en même temps identiques les m premières équations de la seconde série (2). Il ne restera donc plus que $2n - 2m$ équations pour déterminer les $2n - m$ constantes nouvelles amenées par l'intégration de l'équation (11) devenue $(P_m) = 0$; et par conséquent m d'entre elles demeureront arbitraires.

C'est du reste ce qu'il était facile de prévoir. En effet, puisque V ne renferme pas les fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{m-1}$, et que ces fonctions n'entrent pas non plus dans les conditions relatives aux limites, on aurait pu prendre $y^{(m)}$ pour fonction inconnue et chercher la forme à donner à cette fonction pour rendre l'intégrale S maximum ou minimum. La valeur en x de $y^{(m)}$ une fois trouvée, pour remonter à la fonction primitive y, il faudrait encore intégrer m fois de suite, ce qui introduirait nécessairement dans le résultat définitif m constantes arbitraires.

60. L'équation différentielle $(P) = 0$ peut encore être intégrée immédiatement une fois, lorsque la fonction V est linéaire par rapport à y, et que de plus le coefficient de y ne contenant que x prend la forme $\varphi'(x)$. Dans cette hypothèse, en effet, on a $P = \varphi'(x)$ et l'équation $(P) = 0$ devient

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2P_2}{dx^2} + \ldots = \varphi'(x),$$

ou, en intégrant,

$$(P_1) = \int \varphi'(x)\, dx = \varphi(x) + c.$$

Mais, dans ce cas, si les conditions (2)

$$\int^{x_1}(P_1)=0,\quad \int^{x_2}(P_1)=0,$$

existent, c'est-à-dire si l'on n'a apporté aucune restriction aux valeurs limites de la fonction y, le problème sera indéterminé ou impossible; car la valeur $\varphi(x)+c$ de (P_1) substituée dans les deux équations dont il s'agit, donnera

$$\varphi(x_1)+c=0,\quad \varphi(x_2)+c=0,$$

et ces équations sont incompatibles à moins que $\varphi(x_1)$ ne soit égal à $\varphi(x_2)$. Si, accidentellement, cette condition est remplie, il est vrai qu'on pourra satisfaire aux deux dernières équations par une valeur convenable de la constante c. Mais elles n'établiront alors qu'une seule condition et l'on n'aura en réalité que $2n-1$ équations aux limites pour déterminer les $2n$ constantes, dont l'une au moins restera arbitraire.

61. Enfin, l'ordre de l'équation différentielle (1) peut encore s'abaisser d'une unité, lorsque V ne contient pas explicitement la variable x, quelle que soit d'ailleurs sa forme. En effet, la dérivée totale de V étant dans cette hypothèse

$$\frac{dV}{dx}=Py'+P_1y''+P_2y'''+\ldots+P_ny^{(n+1)},$$

si l'on y substitue pour P sa valeur tirée de l'équation (1)

$$P-\frac{dP_1}{dx}+\frac{d^2P_2}{dx^2}-\ldots\pm\frac{d^nP_n}{dx^n}=0;$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx}&=P_1y''+P_2y'''+\ldots+P_ny^{(n+1)}\\&+\frac{dP_1}{dx}y'-\frac{d^2P_2}{dx^2}y'+\ldots\mp\frac{d^nP_n}{dx^n}y'.\end{aligned}$$

Or, le second membre de cette nouvelle équation est une dérivée exacte ou la somme de dérivées exactes, comme on le voit en groupant les termes deux à deux,

$$P_1 y'' + \frac{dP_1}{dx} y' = \frac{d}{dx}(P_1 y'),$$

$$P_2 y''' - \frac{d^2 P_2}{dx^2} y' = \frac{d}{dx}\left(P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} y'\right),$$

$$P_3 y^{\text{IV}} + \frac{d^3 P_3}{dx^3} y' = \frac{d}{dx}\left(P_3 y''' - \frac{dP_3}{dx} y'' + \frac{d^2 P_3}{dx^2} y'\right),$$

. . . .

Substituant et intégrant, on aura donc

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} V = c + {} & P_1 y' \\ & + P_2 y'' - \frac{dP_2}{dx} y' \\ & + P_3 y''' - \frac{dP_3}{dx} y'' + \frac{d^2 P_3}{dx^2} y' \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + P_n y^{(n)} - \frac{dP_n}{dx} y^{(n-1)} + \dots \pm \frac{d^{n-1} P_n}{dx^{n-1}} y', \end{aligned} \right.$$

équation qui est tout au plus de l'ordre $2n - 1$.

Par exemple, si V ne renfermait que y, l'équation indéfinie (1) se réduirait à $V = c$, d'où $y =$ constante. Si V était fonction de la seule dérivée y', on trouverait encore, en prenant y' pour fonction inconnue, $V = c$, et, par conséquent, $y' =$ const., $y = ax + b$. Si les dérivées y', y'' entraient seules dans V, on aurait, en prenant y' pour fonction inconnue, $V = c + \frac{dV}{dy''} y''$; et ainsi des autres.

62. Nous avons déjà fait remarquer que le nombre des équations est en général égal à celui des inconnues et que les valeurs de celles-ci ne deviennent impossibles ou indéterminées que par suite de suppositions particulières qui rendent les équations aux limites incompatibles, ou équiva-

lentes en ce sens que quelques-unes d'entre elles puissent se déduire les unes des autres. Il est cependant un cas où le nombre des équations est plus grand que celui des inconnues, et qui forme par là une exception à la théorie générale; c'est lorsque V est linéaire par rapport à la dérivée $y^{(n)}$ de l'ordre le plus élevé. En effet, cette forme, comme on l'a vu n° 35, fait disparaître de (P) les deux dernières dérivées $y^{(2n-1)}$, $y^{(2n)}$, de sorte que l'équation (1) ne sera plus que de l'ordre $2n - 2$, et donnera la valeur de y avec $2n - 2$ constantes arbitraires, tandis que les équations aux limites (2), ou les conditions qui pourraient les remplacer, seront toujours en nombre $2n$. Il y a donc plus d'équations que d'inconnues, et le problème est impossible, à moins que des suppositions particulières ne fassent que certaines équations aux limites rentrent dans les autres ou se déduisent des autres.

Supposons, par exemple, qu'en outre des limites x_1, x_2, on ait fixé les valeurs extrêmes de y. Les équations (2) en (P_1) disparaissent, et les $2n - 2$ équations qui restent suffisent à déterminer les $2n - 2$ constantes. Dès lors la fonction y est entièrement connue et l'on peut calculer ses valeurs extrêmes que nous appellerons, pour un instant, b_1, b_2. Il faut donc que les valeurs fixes, qu'on avait assignées d'avance aux valeurs extrêmes de y, soient précisément b_1, b_2; autrement les conditions aux limites seraient incompatibles et le problème n'aurait pas de solution.

63. Jusqu'ici nous avons supposé que V était fonction des seules quantités x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$. Si V renfermait en outre les valeurs limites de quelques-unes de ces quantités, l'équation indéfinie (1) aurait encore la même forme, mais les équations aux limites (2) et (3) subiraient des modifications que nous allons indiquer en peu de

mots. Admettons, pour fixer les idées, que V, avec $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, contienne les valeurs limites inférieures de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, valeurs que nous désignerons, pour abréger, par $\xi, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$, en sorte que

$$\xi = x_1, \quad \eta = \int^{x_1} y, \quad \eta' = \int^{x_1} y', \ldots$$

Conservant à $P, P_1, P_2, \ldots$ leurs significations, posons en outre

$$\frac{dV}{d\xi} = \varpi, \quad \frac{dV}{d\eta} = \varpi_1, \quad \frac{dV}{d\eta'} = \varpi_2, \ldots,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \varpi\, dx = \sigma, \quad \int_{x_1}^{x_2} \varpi_1\, dx = \sigma_1, \quad \int_{x_1}^{x_2} \varpi_2\, dx = \sigma_2, \ldots;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\delta V = P\delta y + P_1 \frac{d\delta y}{dx} + \ldots + P_n \frac{d^n \delta y}{dx^n} \\ + \varpi\delta\xi + \varpi_1\delta\eta + \varpi_2\delta\eta' + \ldots + \varpi_n\delta\eta^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Aux termes de la variation de l'intégrale S que nous avons considérés précédemment, il faudra donc ajouter

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varpi\delta\xi + \varpi_1\delta\eta + \varpi_2\delta\eta' + \ldots + \varpi_n\delta\eta^{(n-1)})\, dx,$$

ou, ce qui revient au même, puisque $\delta\xi, \delta\eta, \delta\eta', \ldots$, indépendants de x, peuvent sortir du signe $\int$,

$$\sigma\delta\xi + \sigma_1\delta\eta + \sigma_2\delta\eta' + \ldots + \sigma_n\delta\eta^{(n-1)}.$$

Or, d'après la définition même des quatités $\xi, \eta, \eta', \ldots$, on a

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \delta x_1, \\ \delta\eta &= \int^{x_1} (\delta y + y'\delta x_1), \\ \delta\eta' &= \int^{x_1} \left(\frac{d\delta y}{dx} + y''\delta x_1\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

l'ensemble des termes qu'on doit ajouter à la variation de l'intégrale peut donc s'écrire

$$\int^{x_1}\left(\sigma_1\delta y + \sigma_2\frac{d\delta y}{dx} + \ldots + \sigma^n\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\right)$$

$$+\int^{x_1}(\sigma + \sigma_1 y' + \sigma_2 y'' + \ldots + \sigma_n y^{(n)})\,\delta x_1.$$

Dès lors, en égalant à zéro la variation complète de l'intégrale S, on obtiendra la même équation indéfinie (1) et les mêmes équations pour la limite supérieure x_2 qu'auparavant; mais les équations relatives à la limite inférieure x_1 deviendront

$$(13)\quad\left\{\begin{array}{l}\int^{x_1}(\mathrm{P}_1) = \sigma_1,\quad \int^{x_1}(\mathrm{P}_2) = \sigma_2,\ \ldots,\quad \int^{x_1}(\mathrm{P}_n) = \sigma_n,\\ \int^{x_1}[\mathrm{V} - \sigma - \sigma_1 y' - \sigma_2 y'' - \ldots - \sigma_n y^{(n)}] = 0.\end{array}\right.$$

On aura donc encore le même nombre d'équations qu'auparavant, mais ce nombre deviendra plus grand si V contient les valeurs limites de $y^{(n)}$ ou des dérivées d'ordres supérieurs; le nombre des équations aux limites dépasserait alors le nombre des constantes indéterminées et le problème du maximum ou du minimum serait en général impossible.

64. II. *On cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale*

$$\mathrm{S} = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{V}\,dx,$$

dans laquelle

$$\mathrm{V} = f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(n)}],$$

y et z étant deux fonctions inconnues de la variable x, et y', y'', ..., z', z'', ..., leurs dérivées successives.

Quand on égale à zéro la variation de l'intégrale S trouvée n° 36, en admettant que les limites x_1, x_2, ainsi que les valeurs limites de y, z et de leurs dérivées ne soient assujetties à priori à aucune restriction, les termes affectés d'intégration fournissent les deux équations indéfinies

$$(\mathrm{P}) = 0, \quad (\mathrm{Q}) = 0,$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} \mathrm{P} - \dfrac{d\,\mathrm{P}_1}{dx} + \dfrac{d^2\,\mathrm{P}_2}{dx_2} - \ldots \pm \dfrac{d^m\,\mathrm{P}_m}{dx^m} = 0 \\ \mathrm{Q} - \dfrac{d\,\mathrm{Q}_1}{dx} + \dfrac{d^2\,\mathrm{Q}_2}{dx^2} - \ldots \pm \dfrac{d^n\,\mathrm{Q}_n}{dx^n} = 0; \end{cases}$$

les termes affectés de substitution et renfermant ∂y, ∂z ou leurs dérivées, donnent les $2(m+n)$ équations aux limites

$$(2) \quad \begin{cases} \Big|^{x_1}(\mathrm{P}_1) = 0, & \Big|^{x_1}(\mathrm{P}_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_1}(\mathrm{P}_m) = 0, \\ \Big|^{x_2}(\mathrm{P}_1) = 0, & \Big|^{x_2}(\mathrm{P}_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_2}(\mathrm{P}_m) = 0, \\ \Big|^{x_1}(\mathrm{Q}_1) = 0, & \Big|^{x_1}(\mathrm{Q}_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_1}(\mathrm{Q}_n) = 0, \\ \Big|^{x_2}(\mathrm{Q}_1) = 0, & \Big|^{x_2}(\mathrm{Q}_2) = 0, \ldots, & \Big|^{x_2}(\mathrm{Q}_n) = 0, \end{cases}$$

auxquelles s'ajoutent les deux nouvelles équations

$$(3) \quad \Big|^{x_1}\mathrm{V} = 0, \quad \Big|^{x_2}\mathrm{V} = 0,$$

provenant des termes en ∂x_1 et ∂x_2.

Les deux équations différentielles simultanées (1), qui doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de l'intégrale, serviront à déterminer les formes générales des fonctions y et z. Or, puisque V et ses dérivées partielles P_m, Q_n contiennent les dérivées de y jusqu'à $y^{(m)}$ et celles de z jusqu'à $z^{(n)}$ inclusivement, la première de ces équations sera de l'ordre $2m$ par rapport à y et de l'ordre $m+n$ par rapport à z, tandis que la seconde sera de l'ordre $m+n$ par rapport à y et de l'ordre $2n$ par rapport à z, c'est-à-dire que les deux équations indéfinies prendront les formes

$$\varphi[x, y, y', \ldots, y^{(2m)}, z, z', \ldots, z^{(m+n)}] = 0,$$
$$\psi[x, y, y', \ldots, y^{(m+n)}, z, z', \ldots, z^{(2n)}] = 0.$$

Différentiant la première $2n$ fois et la seconde $m+n$ fois de suite, on aura $m+3n+2$ équations renfermant les dérivées de y jusqu'à $y^{(2m+2n)}$, et celles de z jusqu'à $z^{(m+3n)}$ inclusivement, et l'on pourra éliminer les $m+3n+1$ inconnues z, z', z'', $\ldots$, $z^{(m+3n)}$, ce qui conduira à une équation différentielle ne contenant plus que y et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2m+2n$,

$$\chi[x, y, y', y'', \ldots, y^{(2m+2n)}] = 0,$$

laquelle intégrée donnera la fonction y avec $2(m+n)$ constantes arbitraires. En remontant aux équations qui ont servi à l'élimination, on en déduira la seconde fonction inconnue z exprimée au moyen des mêmes constantes.

Il resterait ensuite à déterminer ces constantes arbitraires et les limites x_1, x_2 au moyen des équations aux limites (2) et (3). Mais, bien que le nombre des équations soit égal à celui des inconnues, elles conduiraient, comme dans le cas précédent, à un résultat absurde qui avertirait que le problème, dans les termes où nous l'avons posé,

n'a point de solution. On comprend d'ailleurs à priori et sans qu'il soit besoin d'aucune discussion analytique, qu'en faisant varier arbitrairement avec les fonctions y, z les limites x_1, x_2, on rendrait chimérique la recherche de maximum ou minimum de l'intégrale S, puisqu'il est évident qu'elle pourrait alors croître ou décroître indéfiniment.

65. L'intégrale S n'est donc susceptible d'un maximum ou d'un minimum qu'autant que les limites x_1, x_2 ou les valeurs limites de y, z et de leurs dérivées sont assujetties à certaines restrictions. Ce qu'il y a de plus simple, est de supposer constantes les limites x_1, x_2. Leurs variations δx_1, δx_2 étant alors nulles, les deux derniers termes de δS disparaissent d'eux-mêmes et les équations (3) n'ont plus lieu. Les équations (2) serviront alors à déterminer les $2(m+n)$ constantes arbitraires amenées par l'intégration des équations indéfinies (1).

Au lieu de supposer fixes x_1, x_2, on pourrait faire d'autres hypothèses relatives aux valeurs limites de x, y, $y', \ldots, y^{(m-1)}$, z, $z', \ldots, z^{(n-1)}$, et on les mettrait en jeu exactement de la même manière que dans le cas précédent. Ces hypothèses modifieraient de différentes manières les équations aux limites (2) et (3) sans altérer en rien les équations indéfinies (1); mais le nombre total des conditions à remplir resterait toujours le même, et suffirait en général à déterminer les inconnues du problème. Nous disons *en général*, car il peut arriver pour certaines formes particulières ou certains modes de composition de la fonction V que le nombre des constantes arbitraires soit inférieur ou supérieur à celui des équations aux limites, et que le problème soit, par conséquent, indéterminé ou impossible. Il suffira d'avoir signalé l'existence de ces anomalies, dont la discussion, d'après ce qui précède, ne souffre plus de difficulté.

SEPTIÈME LEÇON.

Maxima et minima des intégrales multiples. — Cas d'une intégrale double qui renferme une fonction indéterminée z avec ses dérivées partielles du premier ordre. — Cas d'une intégrale double renfermant une fonction z avec ses dérivées partielles du premier et du second ordre. — Cas d'une intégrale triple renfermant une fonction u avec ses dérivées partielles du premier ordre.

---

66. III. *On cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale double*

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} V dy dx,$$

dans laquelle

$$V = f(x, y, z, p, q),$$

z étant une fonction inconnue des deux variables indépendantes x, y, et p, q ses dérivées partielles du premier ordre.

Désignons, comme auparavant, par N, P, Q, les dérivées partielles de V relatives à z, p, q, la variation de l'intégrale sera (nº 42)

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy}\right) \delta z . dy dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_2} \left(Q - P \frac{dy_2}{dx}\right) \delta z . dx - \int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \left(Q - P \frac{dy_1}{dx}\right) \delta z . dx$$

$$+ \Big|^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z . dy - \Big|^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} P \delta z . dy$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_2} V\delta y_2 \,.\, dx - \int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1} V\delta y_1 \,.\, dx$$

$$+\Big|^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} V\delta x_2 \,.\, dy - \Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2} V\delta x_1 \,.\, dy.$$

Quoiqu'il semble évident que si l'on n'apporte aucune restriction ni à la fonction z ni aux limites de l'intégrale, celle-ci pouvant croître ou décroître indéfiniment ne sera susceptible ni de maximum ni de minimum ; cependant, comme le problème absolu est en quelque sorte le type du problème relatif, nous admettons d'abord que les variations δz, δy_1, δy_2, δx_1, δx_2 sont toutes arbitraires et indépendantes les unes des autres, en nous réservant de faire subir aux équations de condition obtenues dans cette hypothèse, les modifications qui conviendront aux diverses restrictions. Cherchons donc, en l'absence de toute restriction, les équations dans lesquelles se partage la condition fondamentale $\delta S = 0$.

Le premier terme de δS fournit d'abord l'équation indéfinie

$$(1) \qquad N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0,$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de x, y, comprises entre les limites de l'intégrale double, ou pour tous les points du plan xy situés dans l'intérieur du quadrilatère ABDC, *fig.* 1, p. 76.

Les quatre termes suivants, renfermant δz sous un signe de substitution, font naître les quatre équations aux limites

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Big|^{y_1}\left(Q - P\dfrac{dy_1}{dx}\right) = 0, & \Big|^{y_2}\left(Q - P\dfrac{dy_2}{dx}\right) = 0, \\ \Big|^{x_1} P = 0, & \Big|^{x_2} P = 0, \end{array} \right.$$

qui doivent subsister pour les points du contour ABDC, la première le long de la courbe inférieure AC ($y=y_1$), la seconde le long de la courbe supérieure BD ($y=y_2$), la troisième le long de la droite AB ($x=x_1$), la quatrième le long de la droite CD ($x=x_2$). On peut, du reste, réunir les deux premières conditions dans cet énoncé unique que $Q\,dx - P\,dy$ doit être nul le long des deux courbes AC, BD, les différentielles dx, dy étant relatives à ces courbes. On énonce de même les deux dernières conditions à la fois en disant que P doit être nul le long des deux droites AB et CD; or, comme ces droites sont perpendiculaires à l'axe des x, dx est nul pour chacune d'elles, et l'équation $P=0$ entraîne celle-ci $Q\,dx - P\,dy = 0$; donc, pour que l'ensemble des conditions (2) soit satisfait, il faut et il suffit que l'on ait

$$Q\,dx - P\,dy = 0$$

le long du contour entier auquel s'étend le champ de l'intégrale double, les différentielles dx, dy étant relatives à ce contour.

Cet énoncé comprend évidemment autant de conditions distinctes qu'il y a de côtés dans le contour limite. Le plus souvent il y en quatre; mais rien n'empêche que leur nombre soit plus grand, et que les fonctions y_1, y_2 ou les courbes AC, BD cessent d'être continues ou soient formées de plusieurs parties de nature différente. Quelquefois aussi il peut arriver que les côtés rectilignes AB, CD disparaissent et que le contour se réduise à deux courbes ou même à une seule courbe continue et fermée de toute part. L'équation $Q\,dx - P\,dy = 0$, ou l'ensemble des équations (2), représente donc un nombre de conditions plus ou moins grand selon la nature des limites de l'intégrale.

Enfin les quatre derniers termes de δS contenant les

variations δx_1, δx_2, δy_1, δy_2, dont les deux premières, ou δx_1, δx_2 sortent du signe intégral parce qu'elles sont indépendantes de y, donnent les quatre nouvelles équations aux limites

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \int^{y_1} \mathrm{V} = 0, & \int^{y_2} \mathrm{V} = 0, \\ \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,dy = 0, & \int^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V}\,dy = 0, \end{array} \right.$$

dont les deux premières exigent qu'on ait $\mathrm{V} = 0$ pour tous les points des deux courbes AC, BD, et les deux autres que l'intégrale $\int \mathrm{V}\,dy$, prise le long de la droite AB ou le long de la droite CD, soit nulle.

67. L'équation indéfinie (1) reste toujours la même, quelles que soient les restrictions apportées aux limites de l'intégrale ou aux valeurs limites de z, p, q; c'est une équation aux différences partielles du second ordre. Supposons qu'on sache l'intégrer et qu'elle conduise à une équation primitive entre x, y, z et deux fonctions arbitraires. On disposera de ces fonctions pour satisfaire à deux équations aux limites, lesquelles seront différentes selon les restrictions admises, que nous allons discuter.

1° *Les limites de l'intégrale sont données.* — Les quatre derniers termes de $\delta \mathrm{S}$ disparaissent avec les variations δx_1, δx_2, δy_1, δy_2, qui sont nulles, et les équations (3) cessent d'avoir lieu. Les équations aux limites se réduisent alors au système (2) ou à la condition

$$(4) \qquad \mathrm{Q}\,dx - \mathrm{P}\,dy = 0,$$

qui doit subsister pour tous les points du contour limite et à laquelle les deux fonctions arbitraires doivent satisfaire. Or, pour déterminer complétement ces fonctions, il

suffit de deux équations, tandis que la condition (4) représente, comme on l'a vu, autant d'équations distinctes qu'il y a de côtés ou de courbes différentes dans le contour limite. Il en résulte que si les côtés rectilignes AB, CD ne sont pas nuls, ou mieux, que si dans la composition du contour limite il entre plus de deux courbes distinctes, le problème n'aura pas de solution, à moins toutefois qu'il n'arrive accidentellement que les formes des fonctions arbitraires qui conviennent à deux de ces courbes, conviennent en même temps à toutes les autres.

Lorsque z représente l'ordonnée d'une surface qu'il s'agit de déterminer de manière à rendre l'intégrale S maximum ou minimum, l'hypothèse ou la restriction que nous venons de considérer, signifie que la surface cherchée doit être comprise entre certaines parois cylindriques normales au plan xy et données par les équations

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad y = y_1, \quad y = y_2.$$

2° *Les limites de l'intégrale sont données, ainsi que les valeurs limites de la fonction* z. — Tous les termes de δS affectés de substitution sont identiquement nuls et les équations aux limites (2) et (3) disparaissent par conséquent. Mais la surface cherchée est alors assujettie à passer par certaines courbes dans l'espace, courbes qui sont connues, puisqu'on a donné non-seulement leurs projections sur le plan xy, ou le contour limite, mais aussi les valeurs correspondantes de l'ordonnée z. Or, quand on aura fait passer la surface par deux courbes données, les deux fonctions arbitraires seront déterminées ; si le nombre des courbes ou des côtés du contour limite était plus grand, on aurait donc plus de conditions que ne peuvent en vérifier, généralement, les fonctions arbitraires, et le problème serait impossible.

3° *La valeur de* z *aux limites de l'intégrale est*

constante et donnée, ces limites étant elles-mêmes variables. — Cela veut dire que la surface cherchée est seulement assujettie à se terminer dans un plan donné parallèle au plan xy. Puisque nous supposons

$$\int^{x_1} z = \int^{x_2} z = \int^{y_1} z = \int^{y_2} z = k,$$

k étant une quantité constante et donnée, nous aurons, en prenant (n° 30) la variation des deux membres de ces équations

$$\int^{x_1} (\delta z + p\,\delta x_1) = 0, \quad \int^{x_2} (\delta z + p\,\delta x_2) = 0,$$

$$\int^{y_1} (\delta z + q\,\delta y_1) = 0, \quad \int^{y_2} (\delta z + q\,\delta y_2) = 0.$$

Si, dans la variation de l'intégrale, on réunit deux à deux les termes affectés de la même substitution, on obtiendra quatre expressions définies renfermant chacune deux variations devenues fonctions l'une de l'autre en vertu des relations qui précèdent. Donc, en éliminant une de ces variations et égalant à zéro le coefficient de l'autre, on en déduira quatre équations aux limites, qui devront remplacer les systèmes (2) et (3). Considérons, par exemple, les deux termes affectés de la substitution $y = y_1$, qui, réunis en un seul, deviennent

$$-\int_{x_1}^{x_2} \int^{y_1} \left\{ V\,\delta y_1 + \left(Q - P\frac{dy_1}{dx} \right) \delta z \right\} dx;$$

après avoir éliminé δz à l'aide de la relation $\delta z + q\,\delta y_1 = 0$, qui doit avoir lieu, comme on l'a vu tout à l'heure, pour la limite inférieure de y, égalons à zéro le coefficient de δy_1; il viendra

$$\int^{y_1} \left\{ V - \left(Q - P\frac{dy_1}{dx} \right) q \right\} = 0.$$

On aura également pour la limite supérieure de y

$$\int^{y_2}\left\{V - \left(Q - P\frac{dy_2}{dx}\right)q\right\} = 0.$$

Les deux termes de δS, affectés de la substitution $x = x_1$, donnent de même la somme

$$-\int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(V\delta x_1 + P\delta z)\,dy;$$

éliminant δz, en se servant de la relation $\delta z + p\,\delta x_1 = 0$, qui doit être vérifiée pour la limite inférieure de x, et égalant à zéro le coefficient de la variation δx_1, qu'on aura fait sortir du signe intégral, puisqu'elle n'est au fond qu'une constante arbitraire, on trouvera

$$\int^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(V - Pp)\,dy = 0,$$

et, de même, pour la limite supérieure de x,

$$\int^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(V - Pp)\,dy = 0.$$

En résumé, il résulte de cette discussion qu'on doit avoir $\int(V - Pp)\,dy = 0$, l'intégrale étant prise le long de l'une ou de l'autre des droites AB, CD (*fig.* 1), et $V - \left(Q - P\frac{dy}{dx}\right)q = 0$ pour chacune des deux courbes AC, BD, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ étant relative à ces courbes. Mais, puisque z est supposée constante le long des courbes dont il s'agit, sa différentielle totale $dz = pdx + qdy$ sera nulle pour chacune d'elles, et l'on aura, par conséquent,

$$pdx + qdy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q};$$

donc, en définitive, les nouvelles conditions aux limites exigent qu'on ait

$$(5) \qquad V - Pp - Qq = 0$$

pour chacune des courbes $y = y_1$, $y = y_2$, et

$$(6) \qquad \int (V - Pp)\, dy = 0$$

pour chacune des droites $x = x_1$, $x = x_2$, l'intégrale étant prise le long de ces droites entre les limites y_1 et y_2 de la variable y.

4° *Les valeurs limites de x, y, z sont liées entre elles par des relations données quelconques.* — C'est le cas où la surface cherchée est seulement assujettie à avoir son contour limite sur une ou plusieurs surfaces données que nous appellerons surfaces *terminales*. Soit $z = \mathrm{f}(x, y)$ l'équation de l'une de ces surfaces, par exemple, de celle qui correspond à la limite inférieure de y, et désignons par p', q' les dérivées partielles $\frac{d\mathrm{f}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{f}}{dy}$, de z relatives à cette surface; la restriction ainsi établie

$$\Big|^{y_1} \left\{ z - \mathrm{f}(x, y) \right\} = 0$$

entraînera

$$\Big|^{y_1} \left\{ \delta z + (q - q')\, \delta y_1 \right\} = 0,$$

et permettra d'éliminer δz de la somme

$$-\int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \left\{ V \delta y_1 + \left(Q - P \frac{dy_1}{dx} \right) \delta z \right\} dy$$

des deux termes qui, dans la variation de l'intégrale, sont affectés de la substitution $y = y_1$. Ces termes alors ne

fourniront plus qu'une seule équation,

$$\int^{y_1}\left\{V-\left(Q-P\frac{dy_1}{dx}\right)(q-q')\right\}=0,$$

qu'on pourra écrire simplement

$$(7)\qquad V-\left(Q-P\frac{dy}{dx}\right)(q-q')=0,$$

en ajoutant qu'elle doit subsister pour l'intersection de la surface cherchée et de la surface terminale, ou plutôt pour tous les points de sa projection sur le plan xy, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ étant relative à cette même projection. Cette dérivée est d'ailleurs facile à déterminer. En effet, puisque les équations différentielles des deux surfaces dont il s'agit,

$$dz=pdx+qdy,\quad dz=p'dx+q'dy,$$

subsistent simultanément pour leur intersection commune, on aura pour cette même intersection

$$pdx+qdy=p'dx+q'dy,\quad \text{ou}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{p-p'}{q-q'},$$

valeur qui, substituée dans l'équation (7), lui fait prendre la forme plus symétrique

$$(8)\qquad V-P(p-p')-Q(q-q')=0.$$

Nous n'avons pas besoin d'ajouter qu'une équation toute semblable doit avoir lieu pour la surface terminale correspondante à la limite supérieure de y, avec la seule modification, bien entendu, que p', q' signifieront alors les dérivées partielles de l'ordonnée z de cette dernière surface. En général, quel que soit le nombre des surfaces données qui doivent limiter la surface cherchée dans le sens des y, la condition (8) aura lieu pour l'intersection de chacune d'elles avec cette dernière surface.

Considérons à présent le cas plus particulier où la surface donnée $z = f(x, y)$, $dz = p'dx + q'dy$, doit servir de limite inférieure dans le sens des x, où, par conséquent, son intersection avec la surface cherchée est assujettie à se projeter sur le plan xy suivant une droite perpendiculaire à l'axe des x.

La condition ainsi établie

$$\int^{x_1} \{z - f(x, y)\} = 0$$

entraînera

$$\int^{x_1} \{\delta z + (p - p')\delta x_1\} = 0,$$

et permettra d'éliminer δz de la somme

$$-\int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} (V\delta x_1 + P\delta z)\, dy$$

des deux termes qui dans la variation de l'intégrale sont affectés de la substitution $x = x_1$. Ces termes alors ne fourniront plus qu'une seule équation

$$(9) \qquad \int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \{V - P(p - p')\}\, dy = 0,$$

qu'on pourra écrire simplement

$$(10) \qquad \int \{V - P(p - p')\}\, dy = 0,$$

en ajoutant que l'intégrale doit être prise le long de la projection sur le plan xy de l'intersection dont il s'agit, c'est-à-dire le long de la droite AB (*fig.* 1). Une équation semblable aurait lieu pour la limite x_2, ou pour la droite CD, s'il existait de ce côté une seconde surface terminale.

68. Pour généraliser cette dernière espèce de restric-

tion, supposons que la surface cherchée doive se terminer quelque part, par exemple vers la limite inférieure de y, dans une surface donnée $z = \mathrm{f}(x, y)$, ou $dz = p'dx + q'dy$, et qu'en outre l'intersection des deux surfaces doive se projeter sur le plan xy suivant une droite donnée de direction. Soit a la tangente de l'angle compris entre cette direction et l'axe des x; on aura à la fois les deux conditions

$$\Big|^{y_1} \left\{ z - \mathrm{f}(x, y) \right\} = 0, \quad \frac{dy_1}{dx} = a.$$

On tirera de la première

$$\Big|^{y_1} \left\{ \delta z + (q - q')\, \delta y_1 \right\} = 0,$$

et de la seconde

$$\frac{d\delta y_1}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \delta y_1 = k,$$

k étant une constante arbitraire, ce qui réduit à

$$-k.\int_{x_1}^{x_2} \Big|^{y_1} \left\{ \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') \right\} dx$$

les deux termes de $\delta \mathrm{S}$ affectés de la substitution $y = y_1$, lesquels alors ne donneront plus que la seule équation

$$(11) \qquad \int \left\{ \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') \right\} dx = 0,$$

l'intégrale étant prise le long de la projection rectiligne dont il s'agit. A la différentielle de l'abscisse x on peut substituer celle de l'ordonnée y ou celle de la longueur l de la projection, puisqu'on a

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{dl}{\sqrt{1 + a^2}},$$

a étant une quantité constante; l'équation (11) prend

ainsi la forme plus symétrique

(12) $$\int \left\{ \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') \right\} dl = 0.$$

L'équation (10) n'est qu'un cas particulier de celle-ci; car en supposant la projection rectiligne perpendiculaire à l'axe des x, on a $dx = 0$, $dy = dl$, et $dz = q dy = q' dy$, ou $q - q' = 0$. Le résultat définitif de cette discussion peut donc s'énoncer dans les termes suivants :

Si la surface cherchée est seulement assujettie à se terminer dans une surface donnée, $z = \mathrm{f}(x, y)$, ou $dz = p' dx + q' dy$, l'équation (8)

$$\mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') = 0$$

doit avoir lieu pour tous les points de la projection sur le plan xy de l'intersection commune des deux surfaces; mais s'il faut en outre que cette projection soit une ligne droite de direction donnée, il suffit que l'on ait (12)

$$\int \left\{ \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') \right\} dl = 0,$$

l'intégrale étant prise le long de la projection dont il s'agit.

Les restrictions admises dans la troisième hypothèse ne sont évidemment que des cas particuliers de l'hypothèse plus générale que nous venons de discuter. Ajoutons que dans ces deux hypothèses le nombre des équations de condition sera plus grand que celui des fonctions à déterminer, chaque fois que le contour limite se composera de plus de deux parties ou arcs de courbe distincts; on sera donc le plus souvent forcé d'admettre que ces arcs se réduisent à deux, c'est-à-dire que les fonctions y_1 et y_2 deviennent égales pour les valeurs extrêmes de x.

69. IV. *On cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale double*

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{V} dy\, dx,$$

dans laquelle

$$V = f(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

z étant une fonction inconnue de x, y, *et* p, q, r, s, t *ses dérivées partielles du premier et du second ordre.*

Nous avons déjà trouvé (p. 76) la variation de cette intégrale; et pour lui donner la forme définitive qu'exige l'application de la règle du nº 52, il ne reste qu'à décomposer les signes de substitution double en signes de substitution simple, en remplaçant en même temps les dérivées symboliques $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, de y par les dérivées réelles soit de y_1, soit de y_2 qu'elles représentent. Mais cette préparation tant de fois expliquée est trop simple pour qu'il soit nécessaire de récrire ici la variation de l'intégrale sous sa nouvelle forme, d'autant plus que la forme abrégée de la page 76 se prête tout aussi bien à la recherche des conditions de maximum ou de minimum, et permet de les mieux embrasser d'un seul coup d'œil, quand une fois on a bien saisi l'esprit de la règle dont il s'agit, et des notations admises. Il suffira donc d'énumérer les différentes équations que l'on obtient lorsqu'on égale à zéro la variation de l'intégrale, en y regardant d'abord les variations de la fonction z et des limites x_1, x_2, y_1, y_2 comme arbitraires et indépendantes les unes des autres.

Le premier terme donne l'équation indéfinie

$$(1) \qquad N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0,$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de x, y comprises entre les limites de l'intégrale double. C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; et l'équation primitive, *lorsqu'elle existe*, ou la relation finie entre x, y, z qui y satisfait de la manière la plus

générale, renferme *au plus* quatre fonctions arbitraires, dont on peut disposer en général pour satisfaire à quatre équations aux limites.

Les termes en δz et $\frac{d\delta z}{dy}$ sous les signes $\int\int$ donnent

$$(2)\quad \begin{cases} Ry'' + \frac{dR}{dy}y'^2 + \left(2\frac{dR}{dx} - P\right)y' + Q - \frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dy} = 0, \\ Ry'^2 - Sy' + T = 0, \end{cases}$$

équations qui doivent avoir lieu pour chacune des courbes limites $y = y_1$, $y = y_2$, les dérivées y', y'', étant relatives à ces courbes.

Les termes en δz et $\frac{d\delta z}{dx}$ sous les signes $\int\int$ donnent de même les deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0, \\ R = 0, \end{cases}$$

qui doivent être vérifiées le long des deux droites $x = x_1$, $x = x_2$.

Le terme en δz sous les signes $\int\int$ fournit l'équation

$$(4)\quad S - Ry' = 0,$$

qui n'a besoin d'être vérifiée qu'en chacun des quatre points A, B, C, D (*fig.* 1, p. 76), où les deux courbes rencontrent les deux droites, la dérivée y' étant en chaque point relative à la courbe qui y aboutit.

Enfin les termes renfermant les variations δy_1, δy_2, δx_1, δx_2 qui sont indépendantes les deux premières de y, les deux dernières de x, y, donnent naissance aux équations

$$(5)\quad \begin{cases} V = 0, \\ \int V dy = 0, \end{cases}$$

dont la première se rapporte aux deux courbes $y=y_1$, $y=y_2$, et la seconde aux deux droites $x=x_1$, $x=x_2$, l'intégrale $\int V dy$ devant être prise le long de l'une ou de l'autre de ces droites.

Comme chacune des équations (2), (3), (5) doit avoir lieu pour deux courbes ou pour deux droites différentes, tandis que l'équation (4) doit subsister pour quatre points distincts, le nombre total des équations aux limites est *seize*.

70. Lorsque les limites sont fixes, les équations (5) cessent d'avoir lieu et il ne reste plus que douze équations aux limites. Ce nombre étant toujours supérieur à celui des fonctions arbitraires, il n'est pas possible en général de les vérifier toutes à la fois. Dans le cas, cependant, où les côtés rectilignes disparaissent, c'est-à-dire où le contour limite se réduit à deux courbes, les équations (3) et (4) s'en vont et il ne reste plus que le système (2), qui se résout, comme on l'a vu, en quatre conditions distinctes, nécessaires et suffisantes pour déterminer les fonctions arbitraires. Dans ce cas, on a donc lieu de penser que le problème du maximum ou du minimum admet une solution.

71. La première des équations (2) est peu symétrique à cause de la dérivée seconde y'' qu'elle renferme; mais en éliminant cette dérivée on rétablira la symétrie et l'on prouvera en même temps que les équations (2) comprennent comme cas particulier les deux équations (3). En effet, si l'on différentie la seconde équation (2)

$$Ry'^2 - Sy' + T = 0,$$

en y regardant y comme une fonction de x, ainsi que cela doit être, puisque cette équation se rapporte à l'une des

courbes limites $y = y_1$ ou $y = y_2$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}(2\text{R}y' - \text{S})y'' + \dfrac{d\text{R}}{dy}y'^3 + \left(\dfrac{d\text{R}}{dx} - \dfrac{d\text{S}}{dy}\right)y'^2 \\ \quad + \left(\dfrac{d\text{T}}{dy} - \dfrac{d\text{S}}{dx}\right)y' + \dfrac{d\text{T}}{dx}\end{array}\right\} = 0.$$

Entre cette équation et la première des équations (2) on peut éliminer y''; le résultat ne renfermera plus que y' avec ses puissances seconde et troisième, et on le rendra linéaire en y' en faisant servir de nouveau l'équation

$$\text{R}y'^2 - \text{S}y' + \text{T} = 0$$

à l'élimination successive de y'^3 et y'^2. Quand on aura effectué ce calcul, qui ne présente d'autre difficulté que sa longueur, et qu'on aura multiplié par une puissance convenable de dx, on verra le système (2) prendre la forme symétrique

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left[\text{R}\dfrac{d\text{T}}{dx} + \text{S}\left(\text{Q} - \dfrac{d\text{S}}{dx} - \dfrac{d\text{T}}{dy}\right) + \text{T}\left(\dfrac{d\text{S}}{dy} + 3\dfrac{d\text{R}}{dx} - 2\text{P}\right)\right]dx \\ + \left[\text{T}\dfrac{d\text{R}}{dy} + \text{S}\left(\text{P} - \dfrac{d\text{S}}{dy} - \dfrac{d\text{R}}{dx}\right) + \text{R}\left(\dfrac{d\text{S}}{dx} + 3\dfrac{d\text{T}}{dy} - 2\text{Q}\right)\right]dy\end{array}\right\} = 0, \\ \text{R}\,dy^2 - \text{S}\,dx\,dy + \text{T}\,dx^2 = 0.\end{array}\right.$$

Telles sont les conditions à remplir par la fonction z le long des deux courbes $y = y_1$, $y = y_2$, ou mieux le long de chacune des courbes limites, quel que soit leur nombre. On peut même, pour généraliser, les étendre aux côtés rectilignes $x = x_1$, $x = x_2$, lorsqu'ils existent. En effet, la valeur nulle de la différentielle dx qui caractérise ces deux côtés, réduit les équations (6), la seconde à

$$\text{R} = 0,$$

ce qui entraîne $\frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy = 0$, ou $\frac{dR}{dy} = 0$; la première, par conséquent, à

$$P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0,$$

et les ramène ainsi aux conditions (3) déjà établies pour les côtés rectilignes dont il s'agit. On tiendra donc compte à la fois des équations (2) et (3) en étendant les conditions (6) à tous les points du contour limite.

Pour les quatre points d'intersection des courbes $y = y_1$, $y = y_2$ avec les droites $x = x_1$, $x = x_2$, il faut joindre aux équations (2) et (3), ou aux équations (6), la condition (4), laquelle, à cause de $R = 0$, se réduit simplement à

$$S = 0.$$

72. Nous signalerons, en passant, un cas dans lequel les équations aux limites se simplifient considérablement; c'est lorsque, en raison de la forme particulière de la fonction V, l'expression

$$4RT - S^2$$

est identiquement nulle. Dans ce cas, en effet, la seconde des équations (6) donne

$$(7) \qquad y' = \frac{S}{2R} = \frac{2T}{S},$$

et la première devient identique. Il suffit donc alors, pour que les conditions aux limites soient satisfaites, que l'équation (7) subsiste le long du contour limite entier, et qu'on ait d'ailleurs $S = 0$ aux quatre points A, B, C, D. Nous nous bornons à indiquer ce résultat

en laissant au lecteur le soin de le vérifier lui-même.

Au lieu de supposer fixes les limites de l'intégrale, on pourrait établir différentes relations entre les valeurs limites de x, y, z, p, q; en suivant la même marche que dans le cas précédent, il serait toujours facile de trouver les modifications subies dans chaque hypothèse par les équations aux limites. Mais pour les applications que nous avons en vue, une pareille discussion aurait peu d'utilité et nous l'omettons sans regret.

73. Nous ne pouvons, au contraire, passer sous silence un des points les plus délicats, les plus difficiles que l'on rencontre dans la recherche des maxima et minima des intégrales doubles, et qui rend cette recherche beaucoup moins satisfaisante que celle des maxima et minima des intégrales simples. La difficulté à laquelle nous faisons allusion, vient de l'ignorance où l'on est du degré de généralité que comporte la fonction qui doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles d'un ordre supérieur au premier. D'abord on ne sait pas à priori si une pareille équation admet ou non une équation primitive en termes finis qui ait la même généralité qu'elle; et alors même que l'existence de cette équation équivalente est certaine, on ne sait pas combien de fonctions arbitraires elle doit renfermer : tout ce que l'on peut affirmer en général, c'est que le nombre des fonctions arbitraires contenues dans l'équation primitive, *lorsqu'elle existe*, est *au plus* égal à celui qui marque l'ordre de l'équation proposée aux dérivées partielles. Ajoutons que, quand même on connaîtrait le nombre des fonctions arbitraires renfermées dans l'intégrale la plus générale, on ne saurait pas encore au juste par combien de conditions particulières, ou par combien d'équations aux limites elles pourraient être déterminées.

Malgré cette imperfection de la théorie actuelle des équations aux dérivées partielles, l'analogie et l'examen de cas particuliers nous porte à inférer, comme nous l'avons déjà admis sans preuve, dans ce qui précède, qu'on peut en général assujettir une fonction z de deux variables x, y, donnée par une équation aux dérivées partielles de l'ordre n, à remplir n conditions particulières, ou à vérifier n équations exprimant chacune explicitement ou implicitement ce que doit devenir la fonction z pour une relation particulière établie entre les variables x, y; c'est-à-dire, géométriquement parlant, qu'on peut assujettir une surface dont on connaît seulement l'équation aux dérivées partielles de l'ordre n, à passer par n courbes distinctes, et qu'elle sera alors entièrement déterminée.

On sait, en effet, qu'étant donnée une équation entre x, y, z et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, on peut fixer arbitrairement les valeurs que devront prendre pour $x = 0$, ou, en général, pour une relation déterminée $f(x, y) = 0$ entre les variables x, y, la fonction z et une de ses dérivées partielles de chaque ordre jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$, les valeurs, par exemple, de $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, et que de ces valeurs, jointes à l'équation proposée, on peut déduire les valeurs correspondantes de toutes les autres dérivées. Par cela même tous les éléments constitutifs de la fonction z, c'est-à-dire tous les coefficients dont dépendrait son développement en série, supposée convergente, sont complétement déterminés pour la relation particulière

$$f(x, y) = 0,$$

ou le long de la courbe que cette équation représente, de telle sorte que l'on puisse construire par points, ou de proche en proche, la surface à laquelle appartient l'or-

donnée z. De ce théorème connu il résulte immédiatement : 1° qu'une surface dont l'équation aux dérivées partielles est du premier ordre, est complétement fixée lorsqu'on l'assujettit à passer par une courbe donnée; 2° qu'une surface dont l'équation aux dérivées partielles est du second ordre, peut être construite lorsque, en outre de la courbe qu'elle doit contenir, on donne la position du plan tangent le long de cette courbe, ou, en d'autres termes, lorsqu'elle est assujettie à contenir deux courbes infiniment voisines l'une de l'autre; 3° que la surface qui doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, est déterminée, quand, avec la courbe et le plan tangent, on donne la courbure de la section normale à la courbe, c'est-à-dire quand on l'assujettit à passer par trois courbes infiniment voisines, et ainsi de suite.

La proposition que nous avons avancée est donc vraie, lorsque les n courbes données sont infiniment voisines les unes des autres, et tout porte à croire qu'elle sera encore vraie, lorsque les n courbes seront situées d'une manière quelconque dans l'espace.

74. V. *On cherche le maximum ou le minimum d'une intégrale triple*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{V}dzdydx,$$

dans laquelle

$$\mathrm{V} = f(x, y, z, u, p, q, r),$$

u étant une fonction inconnue de trois variables indépendantes x, y, z, et p, q, r ses dérivées partielles du premier ordre.

Nous avons déjà donné, p. 86, la variation de cette intégrale. Cherchons actuellement les équations indéfinies et aux limites qu'entraîne la condition générale de maxi-

mum ou de minimum, la variation égalée à zéro, lorsque les limites ne sont assujetties à aucune restriction.

Le premier terme de la variation fournit l'équation indéfinie

$$(1) \qquad N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dz} = 0,$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de x, y, z comprises entre les limites de l'intégrale, ou pour tous les points de l'espace compris entre les six surfaces A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 (nº 43) qui limitent le champ de l'intégrale triple.

Les termes en δu affectés de substitutions donnent le premier système d'équations aux limites

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & R - P\frac{dz}{dx} - Q\frac{dz}{dy} = 0, \\ & Q - P\frac{dy}{dx} = 0, \\ & P = 0; \end{aligned} \right.$$

la première aura lieu pour les deux surfaces courbes C_1, C_2, la seconde pour les deux cylindres B_1, B_2, et la troisième pour les deux plans A_1, A_2. Les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ dans la première équation sont celles de l'ordonnée z_1 ou z_2 de la surface courbe C_1 ou C_2 que l'on considère; la dérivée $\frac{dy}{dx}$ dans la seconde est relative à l'un ou à l'autre des cylindres B_1, B_2.

Un second système d'équations aux limites

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & V = 0, \\ & \int V dz = 0, \\ & \int\int V dz dy = 0, \end{aligned} \right.$$

est fourni par les termes affectés des variations δz_1, δz_2, δy_1, δy_2, δx_1, δx_2, dont les deux premières sont indépendantes de z, les deux suivantes de y, z, les deux dernières de toutes les variables principales x, y, z. La première de ces nouvelles équations (3) aura lieu pour tous les points des deux faces courbes $z = z_1$, $z = z_2$; la seconde pour toutes les génératrices des deux faces cylindriques $y = y_1$, $y = y_2$, l'intégrale $\int V dz$ devant être prise le long d'une quelconque de ces génératrices; la troisième équation, enfin, devra être vérifiée pour chacune des deux faces planes $x = x_1$, $x = x_2$, l'intégrale $\int\int V dy dx$ s'étendant à l'aire entière de l'une ou de l'autre de ces dernières faces.

La solution du problème du maximum ou du minimum absolu dépendrait ainsi d'une équation indéfinie et de douze équations aux limites; mais comme ce problème, par sa nature même, est impossible, nous passons à l'examen des modifications que doivent subir les équations obtenues, en raison de certaines restrictions apportées aux limites de l'intégrale.

75. 1° *Les limites* x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, *de l'intégrale sont fixes.* — Le système (3) disparaît et les équations aux limites se réduisent au système (2). Pour les ramener à leur plus simple énoncé, considérons un point x, y, z de la surface limite C_1 ou C_2, et désignons par α, β, γ les angles compris entre la normale à la surface et les axes des coordonnées. Si, dans la première équation (2), on remplace les coefficients $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, -1, par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, qui leur sont proportionnels, elle prendra la forme symétrique

$$(4) \qquad P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = 0;$$

sous cette forme elle exprimera que la droite menée par le

point x, y, z et faisant avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à P, Q, R, doit être tangente à la surface limite. L'équation (4) ne remplace pas seulement la première des équations (2), elle comprend les deux autres comme cas particuliers; en effet, si l'on suppose : 1° $\cos\gamma = 0$, ce qui caractérise les deux cylindres B_1, B_2, elle devient $P\cos\alpha + Q\cos\beta = 0$, ou parce que $\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy = 0$, $Q - P\dfrac{dy}{dx} = 0$, et elle coïncide, par conséquent, avec la seconde équation (2); 2° si l'on suppose à la fois $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$, ce qui a lieu pour les deux plans A_1, A_2, elle se réduit à $P = 0$ ou à la troisième équation (2). Les diverses conditions relatives aux limites sont donc exprimées à la fois par la seule équation (4) étendue aux six surfaces A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ou, plus généralement, à toutes les faces limites, quel que soit leur nombre.

Si l'on fixe, en outre des faces limites, la valeur que u doit prendre sur chacune d'elles, toutes les équations aux limites (2), (3) disparaîtront et seront remplacées par les équations qui assignent à u des valeurs déterminées.

76. 2° *On donne seulement les valeurs que u doit prendre sur les surfaces limites, ces surfaces pouvant elles-mêmes se déformer d'une manière quelconque.* — Soit $f(x, y, z)$ la fonction donnée avec laquelle u doit coïncider sur une des surfaces limites, sur celle, par exemple, qui correspond à la limite inférieure de z, et désignons par p', q', r' les dérivées partielles $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{df}{dy}$, $\dfrac{df}{dz}$ de cette fonction, la condition

$$\int^{z_1} \{u - f(x, y, z)\} = 0$$

entraîne

$$\int^{z_1} \left\{ \delta u + (r - r')\,\delta z_1 \right\} = 0,$$

et permet d'éliminer δu de la somme

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_1}\left\{ V\delta z + \left(R - P\frac{dz}{dx} - Q\frac{dz}{dy}\right)\delta u \right\} dy\,dx$$

des termes qui, dans la variation de l'intégrale, sont affectés de la substitution $z = z_1$; ces termes alors fournissent une seule équation

$$V - \left(R - P\frac{dz}{dx} - Q\frac{dz}{dy}\right)(r - r') = 0,$$

qui doit être vérifiée sur la surface limite que l'on considère, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ étant relatives à cette même surface. Ces dérivées sont d'ailleurs faciles à déterminer; car, en différentiant tour à tour par rapport à x et à y l'équation $u = \mathrm{f}(x, y, z)$, qui est supposée avoir lieu pour la surface limite dont il s'agit, on obtient

$$p + r\frac{dz}{dx} = p' + r'\frac{dz}{dx},$$

$$q + r\frac{dz}{dy} = q' + r'\frac{dz}{dy},$$

et, par suite,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{p - p'}{r - r'}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{q - q'}{r - r'};$$

substituant, il vient

$$(5) \qquad V - P(p - p') - Q(q - q') - R(r - r') = 0.$$

Telle est donc l'équation relative à la limite z_1. Une équation toute pareille aurait lieu pour la seconde limite z_2.

si pour cette limite la fonction u était assujettie à une restriction semblable.

Supposons à présent que u doive devenir égale à $f(x, y, z)$, non plus sur une des surfaces courbes $z = z_1$, $z = z_2$, mais sur la surface cylindrique $y = y_1$, de sorte que l'on ait

$$\int^{y_1} \{ u - f(x, y, z) \} = 0,$$

et, par suite,

$$\int^{y_1} \{ \delta u + (q - q') \delta y_1 \} = 0;$$

on pourra éliminer δu des termes

$$-\int_{x_1}^{x_2} \int^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ V \delta y_1 + \left(Q - P \frac{dy}{dx} \right) \delta u \right\} dz dx$$

de la variation de l'intégrale qui sont affectés de la substitution $y = y_1$. Ces termes alors donneront une seule équation aux limites

$$\int^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ V - \left(Q - P \frac{dy}{dx} \right) (q - q') \right\} dz = 0.$$

Pour déterminer la dérivée $\frac{dy}{dx}$, qui est relative à l'intersection du cylindre B_1 avec le plan xy, il suffit de comparer les différentielles totales de u et de $f(x, y, z)$ pour cette même intersection. On trouve ainsi

$$p dx + q dy = p' dx + q' dy, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p - p'}{q - q'},$$

valeur qui ramène l'équation aux limites à la forme

$$(6) \qquad \int \{ V - P(p - p') - Q(q - q') \} dz = 0,$$

l'intégrale dans le premier membre étant prise le long

d'une génératrice quelconque du cylindre B_1. La condition de coïncidence de u avec la fonction $f(x, y, z)$ sur la seconde surface cylindrique $y = y_2$ conduirait à une équation toute semblable à l'équation (6).

Enfin, si cette coïncidence devait avoir lieu sur une des faces planes, sur celle par exemple qui correspond à la limite inférieure de x, de sorte qu'on eût

$$\int^{x_1} \left\{ u - f(x, y, z) \right\} = 0$$

et, par conséquent,

$$\int^{x_1} \left\{ \delta u + (p - p') \delta x_1 \right\} = 0,$$

on éliminerait δu des termes

$$-\int^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} (V \delta x_1 + P \delta u)\, dz dy$$

affectés de la substitution $x = x_1$; et, après avoir fait sortir des signes $\int\int\int$ la variation δx_1, qui est indépendante de toutes les variables principales, on égalerait son coefficient à zéro, ce qui donnerait

$$(7) \qquad \int\int \left\{ V - P(p - p') \right\} dz dy = 0,$$

l'intégrale double s'étendant à la face plane entière A_1. La coïncidence sur la surface plane correspondante à x_2 fournirait une équation toute semblable.

77. La restriction que u doit coïncider, aux limites de l'intégrale, avec une fonction donnée $f(x, y, z)$, entraîne, comme on vient de le voir, des équations de forme différente (5), (6), (7) pour les trois couples de surfaces C_1, C_2, B_1, B_2, A_1, A_2. La raison en est que les quatre dernières se trouvent effectivement dans des conditions plus restreintes que les deux premières, puisque les

surfaces B_1 et B_2 sont assujetties à être cylindriques et perpendiculaires au plan xy, et que les surfaces A_1, A_2 doivent être planes à la fois et normales à l'axe des x. Pour généraliser ce genre de conditions particulières, admettons qu'une surface limite quelconque, celle, par exemple, qui correspond à la limite inférieure de z, doive être un cylindre dont la génératrice fasse avec les axes des coordonnées des angles déterminés ayant pour cosinus a, b, c, et que l'on exige, en outre, que u coïncide avec la fonction connue $\mathrm{f}(x, y, z)$ pour tous les points de ce cylindre; on aura à la fois

$$\int^{z_1} \left\{u - \mathrm{f}(x, y, z)\right\} = 0, \quad a\frac{dz_1}{dx} + b\frac{dz_1}{dy} = c,$$

et, en prenant les variations,

$$\int^{z_1} \left\{\delta u + (r - r')\,\delta z_1\right\} = 0, \quad a\frac{d\delta z_1}{dx} + b\frac{d\delta z_1}{dy} = 0.$$

Intégrée, la seconde équation aux dérivées partielles du premier ordre donne

$$\delta z_1 = \varphi(ay - bx),$$

φ étant une forme de fonction arbitraire. On pourra donc éliminer à la fois δu et δz_1 des termes affectés de la substitution $z = z_1$. Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{W} = \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') - \mathrm{R}(r - r'),$$

ces termes deviendront

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int^{z_1} \mathrm{W}\,\varphi(ay - bx)\,.\,dy\,dx.$$

Cette expression doit s'évanouir quelle que soit la fonction arbitraire φ; mais comme φ renferme les deux variables x, y dans la combinaison particulière $ay - bx$,

nous sommes obligé, pour obtenir l'équation de condition définitive, de ramener φ à ne plus porter que sur une seule variable. Dans ce but, faisons tourner le système des coordonnées autour de l'axe des z jusqu'à ce que l'axe des x devienne perpendiculaire à la génératrice du cylindre limite que l'on considère, et appelons ξ, η, z les coordonnées du nouveau système, liées aux anciennes par les équations

$$\xi = -\frac{ay - bx}{\sqrt{1 - c^2}}; \quad \eta = \frac{ax + by}{\sqrt{1 - c^2}};$$

$\varphi(ay - bx)$ devenue fonction arbitraire de la seule variable ξ sortira du signe d'intégration relatif à η, et son coefficient égalé à zéro fournira l'équation

$$\int W d\eta = 0.$$

Or, la génératrice du cylindre se projetant sur le plan xy suivant la nouvelle ordonnée η, $d\eta$ sera dans un rapport constant avec la différentielle dl de la génératrice; on pourra donc remplacer $d\eta$ par dl et écrire

$$\int W dl = 0,$$

l'intégrale $\int W dl$ étant prise le long d'une génératrice quelconque du cylindre limite; telle est donc l'équation de condition cherchée.

Si la surface limite $z = z_1$ devait être un plan dont on connût la direction ou les dérivées partielles $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_1}{dy}$, la variation de z_1 serait assujettie aux deux conditions

$$\frac{d\delta z_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\delta z_1}{dy} = 0,$$

et se réduirait, par conséquent, à une constante arbitraire

$$\delta z_1 = k.$$

Supposons, en outre, que la restriction $u = \mathrm{f}(x, y, z)$ dût subsister pour cette même surface, ou qu'on eût

$$\int^{z_1} \{u - \mathrm{f}(x, y, z)\} = 0,$$

et, par suite,

$$\int^{z_1} \{\delta u + (r - r')\delta z_1\} = 0.$$

Les termes de la variation de l'intégrale affectés de la substitution $z = z_1$ deviendraient, par l'élimination de δu et de δz_1,

$$-k \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int^{z_1} \mathrm{W}\, dy\, dx,$$

et conduiraient à l'équation

$$\int \int \mathrm{W}\, dy\, dx = 0,$$

dans laquelle l'intégrale double devrait s'étendre à la projection entière du plan limite sur le plan xy. D'ailleurs, comme la différentielle $d\mathrm{A}$ du plan limite est dans un rapport constant avec la différentielle $dxdy$ de sa projection sur le plan xy, l'équation précédente peut s'écrire plus simplement

$$\int \mathrm{W}\, d\mathrm{A} = 0,$$

l'intégrale $\int \mathrm{W}\, d\mathrm{A}$ devant s'étendre au plan limite entier que l'on considère.

78. Résumons en peu de mots les résultats auxquels nous sommes arrivés. Étant donnée, avec ses dérivées partielles p', q', r', une fonction $\mathrm{f}(x, y, z)$ avec laquelle la fonction cherchée u doit se confondre sur une des surfaces limites, sans que cette surface limite soit d'ailleurs assujettie à aucune restriction, on doit avoir pour chaque point de la surface

$$(8) \quad \mathrm{W} = \mathrm{V} - \mathrm{P}(p - p') - \mathrm{Q}(q - q') - \mathrm{R}(r - r') = 0.$$

Mais si l'on demande, en outre, que la surface limite soit un cylindre engendré par une droite de direction donnée, l'équation de condition se changera en

(9) $$\int \mathrm{W} dl = 0,$$

l'intégrale $\int \mathrm{W} dl$ étant prise le long d'une génératrice quelconque l. Enfin, si la surface limite devait être un plan parallèle à un plan donné, il suffirait qu'on eût

(10) $$\int \mathrm{W} d\mathrm{A} = 0,$$

l'intégrale $\int \mathrm{W} d\mathrm{A}$ s'étendant à l'aire totale A du plan limite.

79. Quelles que soient les restrictions auxquelles on assujettisse les limites de l'intégrale $\int\int\int \mathrm{V} dzdydx$ ou les valeurs limites de la fonction u, l'équation indéfinie (1) reste toujours la même. C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre. Quoiqu'on ne sache pas à priori si elle admet ou non une équation primitive en termes finis, ni quelle est la nature de cette équation lorsqu'elle existe, on est porté à admettre que la fonction u, qui y satisfait de la maniere la plus générale, sera complétement déterminée, lorsqu'on l'aura assujettie à vérifier deux conditions particulières, du genre de celles que fournissent les équations aux limites. Or, dans les deux hypothèses que nous venons d'examiner, le nombre effectif des équations aux limites est égal à celui des faces différentes du solide qui constitue le champ de l'intégrale triple; il faudra donc, ou que ces faces puissent se réduire à deux, ou que plusieurs équations aux limites deviennent identiques, sans quoi le problème de maximum ou de minimum n'aura pas de solution,

HUITIÈME LEÇON.

Méthode de Jacobi pour distinguer les maxima et les minima des intégrales simples. — Application de cette méthode à quelques cas particuliers.

---

80. Lorsque les fonctions inconnues dont dépend une intégrale ou une expression définie S ont été déterminées de manière à rendre nulle la variation première δS, et qu'on les fait varier très-peu avec un paramètre $\varkappa$, c'est-à-dire en donnant à ce paramètre un accroissement très-petit, l'expression S subit elle-même un changement, dont le sens dépend uniquement du signe que prend la variation seconde $\delta^2 S$: lorsque cette variation seconde est positive, la valeur de S augmente; lorsqu'elle est négative, la valeur de S diminue. Il en résulte que l'expression S, dans laquelle on aura déterminé les fonctions inconnues, comme nous venons de le dire, sera un *maximum* si la variation seconde $\delta^2 S$ reste toujours négative, un *minimum* si elle reste toujours positive, quelques déformations qu'on fasse subir aux fonctions dont il s'agit. Mais si la variation seconde $\delta^2 S$ peut changer de signe, si elle est positive pour certaines déformations et négative pour d'autres, l'expression S pouvant tantôt diminuer, tantôt croître, ne sera ni un maximum ni un minimum.

Ainsi, pour distinguer analytiquement le maximum du minimum, on aura à discuter la variation seconde $\delta^2 S$. Mais cette discussion, facile en principe, est dans la pratique hérissée de grandes difficultés, qu'on n'a pu vaincre jusqu'ici que dans les cas les plus simples. En effet, tout

ce qu'on a pu obtenir dans cette voie est à peu près compris dans la méthode donnée par Jacobi pour distinguer les maxima et les minima des intégrales simples : c'est cette méthode que nous allons exposer d'une manière aussi élémentaire que le comporte le sujet, en mettant à profit les commentaires dont elle a été l'objet de la part d'autres géomètres.

81. Considérons l'intégrale simple

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx,$$

dans laquelle V est une fonction donnée de x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$. La recherche du maximum ou du minimum de cette intégrale se partage en deux parties : dans la première on peut supposer les valeurs limites de x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$ fixes, mais quelconques, et chercher la relation entre y et x qui rende l'intégrale maximum ou minimum, relation qui renfermera en général $2n$ constantes arbitraires; dans la seconde on fait varier les valeurs limites de x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ autant que le permettent les conditions du problème, et l'on cherche les valeurs des $2n$ constantes arbitraires pour lesquelles l'intégrale soit plus grande ou plus petite que pour toutes les autres valeurs, très-peu différentes de celles-là, qu'on pourrait donner à ces mêmes constantes. Cette seconde partie de la question rentrant entièrement dans la recherche propre au calcul différentiel des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes, nous n'avons pas à nous en occuper ici; il nous suffira, en conséquence, de chercher le maximum ou le minimum de l'intégrale S dans l'hypothèse où les valeurs de x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$ relatives aux deux limites restent invariables.

Dans cette hypothèse, si l'on appelle P, P_1, P_2, ..., P_n

les dérivées partielles de V relatives à y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, et qu'on fasse, pour abréger,

$$(P) = P - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^nP_n}{dx^n},$$

la variation de l'intégrale du premier ordre sera

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} (P)\,\delta y.dx,$$

et celle du second ordre

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \delta(P)\,\delta y + (P)\,\delta^2 y \right\} dx.$$

La première condition du maximum ou du minimum, $\delta S = 0$, conduit à une équation différentielle de l'ordre $2n$

(1) $$(P) = 0,$$

à laquelle on satisfera de la manière la plus générale par une certaine relation

(2) $$y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$$

entre y, x et $2n$ constantes arbitraires. Puisque (P) est nul, la variation seconde se réduit à

(3) $$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \delta(P)\,\delta y.dx,$$

et il s'agit d'examiner si elle peut, ou non, changer de signe.

82. L'existence du maximum ou du minimum exigeant que la variation seconde de l'intégrale ne puisse changer de signe, et, par conséquent, qu'elle ne puisse être nulle en même temps que la variation première, on voit d'abord qu'il n'y aurait ni maximum ni minimum si, dans

les conditions du problème, δy pouvait recevoir une valeur autre que zéro, qui rendît $\delta(\mathrm{P})$ nul identiquement, ou pour toutes les valeurs de x. Or pour faire varier y sans que (P) varie, c'est-à-dire sans que l'équation $(\mathrm{P}) = 0$ cesse d'avoir lieu, il n'est qu'un seul moyen : c'est d'altérer les constantes $a_1, a_2, \ldots$, contenues dans l'intégrale de l'équation différentielle $(\mathrm{P}) = 0$. Cela est évident ; car puisque cette intégrale est la valeur la plus générale de y qui vérifie l'équation $(\mathrm{P}) = 0$, aucune autre valeur de y ne pourrait y satisfaire que pour des valeurs particulières de x. Ainsi la seule forme de δy qui puisse rendre $\delta(\mathrm{P})$ constamment nul, est

$$\delta y = \frac{df}{da_1}\,\delta a_1 + \frac{df}{da_2}\,\delta a_2 + \ldots + \frac{df}{da_{2n}}\,\delta a_{2n},$$

ou bien

$$(4)\qquad \delta y = \alpha_1 \frac{df}{da_1} + \alpha_2 \frac{df}{da_2} + \ldots + \alpha_{2n} \frac{df}{da_{2n}},$$

en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ les variations δa_1, $\delta a_2, \ldots, \delta a_{2n}$, qui sont de nouvelles constantes arbitraires. Telle est donc l'intégrale ou la solution la plus générale de l'équation différentielle $\delta(\mathrm{P}) = 0$. Elle renferme $2n$ constantes arbitraires, ainsi que cela doit être ; car il est facile de voir que le développement de $\delta(\mathrm{P})$ renferme δy avec ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $2n$ inclusivement.

L'existence du maximum ou du minimum exige donc avant tout que δy ne puisse pas avoir la forme (4). Or comme nous supposons fixes les valeurs limites de x, y, $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, sans que la déformation de y soit assujettie à d'autres restrictions, δy peut être une fonction quelconque de x, pourvu qu'elle s'évanouisse, avec ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-1$, aux deux limites de l'intégrale. On en conclura que, si les constantes α_1,

$\alpha_2, \ldots$ dans la formule (4) peuvent être déterminées de manière à vérifier les conditions

$$\delta y = 0, \quad \frac{d\delta y}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} = 0,$$

aux deux limites de l'intégrale, la solution (2) ne donnera ni maximum ni minimum.

83. La restriction imposée à δy, afin que la variation seconde $\delta^2 S$ ne s'évanouisse pas, est susceptible d'une interprétation géométrique très-remarquable. Si l'on regarde x et y comme les coordonnées rectilignes d'un point, l'équation $y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ représente une courbe plane qui se déforme d'une manière continue, quand on fait varier les constantes $a_1, a_2, \ldots$, avec un paramètre commun $\varkappa$. Donnons à ce paramètre un accroissement ι et désignons, comme nous l'avons fait, par $\delta y, \delta^2 y, \ldots$, les dérivées successives de y relatives à $\varkappa$, nous aurons une nouvelle courbe du même genre que la première, mais dans laquelle à l'abscisse x correspondra l'ordonnée

$$y + \Delta y = y + \iota\delta y + \frac{\iota^2}{1.2}\delta^2 y + \ldots.$$

Pour que cette courbe passe par un point donné A de la première courbe, il faut qu'en ce point on ait $\Delta y = 0$, ou, en divisant par ι,

$$\delta y + \frac{\iota}{1.2}\delta^2 y + \ldots = 0.$$

Pareillement la dérivée y' sera la même pour les deux courbes, ou les deux courbes auront un contact du premier ordre au point dont il s'agit, si l'on a en outre en ce point

$$\delta y' + \frac{\iota}{1.2}\delta^2 y' + \ldots = 0.$$

Le contact des deux courbes sera du second ordre, si la nouvelle condition

$$\delta y'' + \frac{\iota}{1.2}\delta^2 y'' + \ldots = 0$$

est remplie avec les deux précédentes, et ainsi de suite. Or, lorsque ι tend vers zéro, la seconde courbe s'approche indéfiniment de la première ; pour $\iota = 0$ les deux courbes coïncident et les équations précédentes deviennent

$$\delta y = 0, \quad \delta y' = \frac{d\delta y}{dx} = 0, \quad \delta y'' = \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0, \ldots .$$

Donc, si la variation δy et ses $n - 1$ dérivées successives s'évanouissent en même temps au point A, ce point sera la limite de l'intersection de la courbe donnée et d'une autre courbe du même genre ayant avec la première un contact de l'ordre $n - 1$, et tendant indéfiniment à se confondre avec elle.

Ces considérations permettent de formuler de la manière suivante le résultat obtenu n° 82 : Ayant trouvé une courbe AB qui satisfait à la condition $\delta S = 0$, pour reconnaître si elle correspond réellement à un maximum ou minimum de l'intégrale S, on fera varier les constantes contenues dans son équation, et l'on cherchera s'il est possible de déterminer par ce moyen une courbe de même nature passant par deux points donnés de la première courbe et ayant avec elle en ces points un contact de l'ordre $n-1$; ensuite on rendra ces points mobiles sur la première courbe et on les fera approcher simultanément des points extrêmes A, B correspondants aux limites de l'intégrale ; cela posé, s'il arrive qu'en même temps la seconde courbe s'approche indéfiniment de la première, de sorte que les deux courbes coïncident lorsque leurs points communs sont en A et B, la solution qu'on examine ne

donnera ni un maximum ni un minimum de l'intégrale proposée. Il en sera de même, évidemment, si le contact de l'ordre $n-1$ des deux courbes infiniment voisines peut avoir lieu en deux points C, D, situés entre A et B sur la première courbe, puisque l'intégrale, n'ayant ni maximum ni minimum entre C et D, ne saurait en avoir dans toute son étendue.

Au lieu de faire varier les deux points de contact, on peut évidemment fixer le premier point en A et faire mouvoir le second sur la courbe donnée, jusqu'à ce que la seconde courbe coïncide avec elle; on trouvera ainsi la limite jusqu'à laquelle ou au delà de laquelle l'intégration ne doit pas s'étendre, pour que le maximum ou le minimum ne cesse pas d'avoir lieu.

84. D'après cela, la première chose à examiner est si la forme (4) de la variation δy est compatible ou non avec les conditions admises, c'est-à-dire si dans l'équation

$$\delta y = \alpha_1 \frac{df}{da_1} + \alpha_2 \frac{df}{da_2} + \ldots + \alpha_{2n} \frac{df}{da_{2n}}$$

on peut trouver pour les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des valeurs différentes de zéro, au moins pour quelques-unes d'entre elles, et telles que δy avec toutes ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-1$ s'évanouisse aux deux limites de l'intégrale, ou seulement pour deux valeurs distinctes de x comprises entre ces limites. Si cela est possible, la discussion est terminée et l'on n'a pas besoin d'aller plus loin, car on sait qu'alors il n'y a ni maximum ni minimum; mais si l'on parvient à reconnaître, au contraire, que δy ne peut pas avoir la forme ci-dessus, il faudra examiner le signe de la variation seconde $\delta^2 S$ pour d'autres formes admissibles de δy. Pour cela, on sera obligé de faire subir à la variation seconde $\delta^2 S$ diverses

tranformations ayant pour but d'introduire sous le signe intégral un carré parfait multiplié par un facteur connu. Ces transformations reposent sur certaines propriétés d'une classe particulière d'équations différentielles linéaires, propriétés que nous ferons connaître dans les numéros suivants.

85. Soit φ une fonction homogène entière et du second degré de $z, z', z'', \ldots, z^{(n)}$, z étant une fonction quelconque de x et $z', z'', \ldots$ ses dérivées successives; désignons par $\varphi'(z), \varphi'(z'), \ldots, \varphi'(z^{(n)})$ les dérivées partielles de φ relatives à $z, z', \ldots, z^{(n)}$, nous disons que l'expression

$$(5)\qquad \Phi(z) = \varphi'(z') - \frac{d.\varphi'(z')}{dx} + \frac{d^2\varphi'(z'')}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n\varphi'(z^{(n)})}{dx^n},$$

fonction linéaire de $z, z', z'', \ldots, z^{(2n)}$, peut se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \mathrm{A}z - \frac{d.\mathrm{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.\mathrm{A}_n z^{(n)}}{dx^n},$$

$\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ ne renfermant que la variable x.

Remarquons d'abord que si l'on fait, pour abréger,

$$a_{rs} = \frac{d^2\varphi}{dz^{(r)}\,dz^{(s)}},$$

$a_{rs} = a_{sr}$ ne renfermant plus ni z ni ses dérivées, la fonction φ aura nécessairement la forme

$$\begin{aligned}
\varphi = \frac{1}{2}a_{00}zz &+ a_{01}zz' + a_{02}zz'' + \ldots + a_{0n}zz^{(n)}\\
&+ \frac{1}{2}a_{11}z'z' + a_{12}z'z'' + \ldots + a_{1n}z'z^{(n)}\\
&\qquad + \frac{1}{2}a_{22}z''z'' + \ldots + a_{2n}z''z^{(n)}\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}a_{nn}z^{(n)}z^{(n)};
\end{aligned}$$

ses dérivées partielles seront donc

$$\varphi'(z) = a_{00}z + a_{01}z' + a_{02}z'' + \ldots + a_{0n}z^{(n)},$$
$$\varphi'(z') = a_{10}z + a_{11}z' + a_{12}z'' + \ldots + a_{1n}z^{(n)},$$
$$\varphi'(z'') = a_{20}z + a_{21}z' + a_{22}z'' + \ldots + a_{2n}z^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi'(z^{(n)}) = a_{n0}z + a_{n1}z' + a_{n2}z'' + \ldots + a_{nn}z^{(n)}.$$

Différentions ces équations par rapport à x, la seconde une fois, la troisième deux fois, etc., et ajoutons-les après avoir changé le signe de la seconde, de la quatrième, etc., équation, nous trouverons la fonction $\Phi(z)$ exprimée par une suite de termes dont les suivants

$$(7)\qquad a_{00}z - \frac{d.a_{11}z'}{dx} + \frac{d^2.a_{22}z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.a_{nn}z^{(n)}}{dx^n}$$

ont déjà la forme voulue (6). Les autres se groupent deux à deux en binômes de la forme

$$(-1)^p \frac{d^p.a_{pq}z^{(q)}}{dx^p} + (-1)^q \frac{d^q.a_{pq}z^{(p)}}{dx^q} = Z_{pq},$$

dont chacun peut encore être ramené à la forme (6). En effet, soit $p > q$, $p - q = r$; désignons par h, i, k trois nombres entiers positifs tels que $h + i + k = p + q$, et $h \geqq k$; écrivons pour simplifier a au lieu de a_{pq}, et posons

$$[h, k] = \frac{d^h.a^{(i)}z^{(k)}}{dx^h} \pm \frac{d^k.a^{(i)}z^{(h)}}{dx^k},$$

en prenant chaque fois le signe supérieur ou inférieur suivant que $h - k$ est pair ou impair; le binôme qu'il s'agit de transformer sera

$$Z_{pq} = (-1)^p [p, q].$$

Or il est facile de s'assurer qu'un binôme quelconque de la forme $[h, k]$ se décompose en deux autres de la même

forme, et qu'on a généralement

$$[h, k] = [h - 1, k] + [h - 1, k + 1];$$

on aura donc aussi

$$[p, q] = [p - 1, q] + [p - 1, q + 1].$$

On pourra décomposer de nouveau chaque terme du second membre en deux autres, et en continuant ainsi, on parviendra nécessairement à exprimer $[p, q]$ par une suite de termes qui rentrent dans l'une ou dans l'autre des formes

$$[m, m], \quad [m + 1, m].$$

Mais, en vertu des notations admises, on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} [m, m] &= 2\,\frac{d^m . a^{(p+q-2m)} z^{(m)}}{dx^m}, \\ [m+1, m] &= \frac{d^{m+1} . a^{(p+q-2m-1)} z^{(m)}}{dx^{m+1}} - \frac{d^m . a^{(p+q-2m-1)} z^{(m+1)}}{dx^m} \\ &= \frac{d^m . a^{(p+q-2m)} z^{(m)}}{dx^m}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi les termes dont se composera définitivement $[p, q]$ et par suite le binôme Z_{pq} auront tous la forme requise. On peut ajouter que l'indice du premier terme sera q, et celui du dernier terme $\frac{p+q}{2}$ ou $\frac{p+q-1}{2}$, suivant que $p + q$ est pair ou impair.

86. Nous pourrions nous contenter de ces indications générales, qui prouvent déja suffisamment la possibilité d'effectuer la transformation dont il s'agit; mais comme la marche que nous venons de signaler conduit très-facilement au développement définitif de $[p, q]$, nous ne laisserons pas de la suivre jusqu'au bout.

On trouve d'abord successivement

$$\begin{aligned}
[p, q] &= [p-1, q] + [p-1, q+1], \\
[p-1, q] &= [p-2, q] + [p-2, q+1], \\
[p-2, q] &= [p-3, q] + [p-3, q+1], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[q+2, q] &= [q+1, q] + [q+1, q+1];
\end{aligned}$$

on a d'ailleurs, en vertu des relations (8),

$$[q+1, q] = \frac{1}{2}[q, q];$$

substituant, il viendra donc

$$(9) \quad \begin{aligned}[p, q] = \frac{1}{2}[q, q] &+ [q+1, q+1] \\ &+ [q+2, q+1] + \ldots + [p-1, q+1].\end{aligned}$$

ou

$$[p, q] = \frac{1}{2}[q, q] + [q+1, q+1] + R_1,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$R_1 = [q+2, q+1] + [q+3, q+1] + \ldots + [p-1, q+1].$$

Les différents termes de cette dernière équation, développés de la même manière en série de la forme (9), donnent successivement

$$\begin{aligned}
[q+2, q+1] &= \frac{1}{2}[q+1, q+1], \\
[q+3, q+1] &= \frac{1}{2}[q+1, q+1] + [q+2, q+2], \\
[q+4, q+1] &= \frac{1}{2}[q+1, q+1] + [q+2, q+2] \\
&\qquad + [q+3, q+2], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[p-1, q+1] &= \frac{1}{2}[q+1, q+1] + [q+2, q+2] \\
&\qquad + [q+3, q+2] + \ldots + [p-2, q+2].
\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations en nombre $p-q-2=r-2$, on trouve

$$R_1=\frac{1}{2}(r-2)[q+1, q+1]+(r-3)[q+2, q+2]+R_2,$$

où

$$R_2=(r-4)[q+3, q+2]+(r-5)[q+4, q+2] + \ldots + 1.[p-2, q+2].$$

Chaque terme de cette nouvelle série peut se développer de la même manière, et ainsi de suite. Si l'on appelle n_ρ le coefficient du terme qui en a ρ avant lui dans le développement de la $n^{ième}$ puissance du binôme, en sorte que

$$n_0=n_n=1, \quad n_1=n_{n-1}=n, \quad n_2=n_{n-2}=\frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots,$$

$$n_\rho=n_{n-\rho}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\rho+1)}{1.2.3\ldots\rho};$$

si, de plus, on se rappelle la relation facile à vérifier

$$n_\rho+n_{\rho+1}=(n+1)_{\rho+1},$$

qui donne l'une après l'autre les égalités

$$n_0=(n+1)_0,$$

$$n_0+(n+1)_1=(n+2)_1,$$

$$n_0+(n+1)_1+(n+2)_2=(n+3)_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n_0+(n+1)_1+(n+2)_2+\ldots+(n+\rho)_\rho=(n+\rho+1)_\rho,$$

ou, en d'autres termes,

$$n_n+(n+1)_n+(n+2)_n+\ldots+(n+\rho)_n=(n+\rho+1)_{n+1},$$

on trouvera successivement

$$R_2 = \frac{1}{2}(r-3)_2[q+2, q+2] + (r-4)_2[q+3, q+3]$$
$$+ (r-5)_2[q+4, q+3] + (r-6)_2[q+5, q+3]$$
$$+ \ldots + 2_2[p-3, q+3]$$
$$= \frac{1}{2}(r-3)_2[q+2, q+2] + (r-4)_2[q+3, q+3] + R_3,$$

$$R_3 = \frac{1}{2}(r-4)_3[q+3, q+3] + (r-5)_3[q+4, q+4]$$
$$+ (r-6)_3[q+5, q+4] + (r-7)_3[q+6, q+4]$$
$$+ \ldots + 3_3[p-4, q+4]$$
$$= \frac{1}{2}(r-4)_3[q+3, q+3] + (r-5)_3[q+4, q+4] + R_4,$$

etc. On poursuivra ces développements jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on arrive à une expression qui n'ait plus besoin d'être transformée. Cette expression sera, dans le cas où r est un nombre impair :

$$R_{\frac{r-1}{2}} = \frac{1}{2}\left[q + \frac{r-1}{2},\quad q + \frac{r-1}{2}\right],$$

dans le cas où r est un nombre pair :

$$R_{\frac{r}{2}-1} = \frac{r}{4}\left[q + \frac{r}{2} - 1,\ q + \frac{r}{2} - 1\right] + \left[q + \frac{r}{2},\ q + \frac{r}{2}\right].$$

Si l'on substitue les valeurs de $R_1, R_2, \ldots, [p, q]$ sera exprimé par une série dont les termes successifs renfermeront $[q, q]$, $[q+1, q+1]$, $[q+2, q+2]$, ..., multipliés respectivement par les coefficients

$$\frac{1}{2},\quad 1 + \frac{1}{2}(r-2),\quad (r-3)_1 + \frac{1}{2}(r-3)_2,$$
$$(r-4)_2 + \frac{1}{2}(r-4)_3, \ldots,$$

ou par

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\frac{r}{1},\quad \frac{1}{2}\frac{r(r-3)}{1.2},\quad \frac{1}{2}\frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3},\ldots,$$

puisqu'on a en général

$$(r-\rho-1)_{\rho-1}+\frac{1}{2}(r-\rho-1)_{\rho}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r(r-\rho-1)(r-\rho-2)\ldots(r-2\rho+1)}{1.2.3\ldots\rho}.$$

Remettant pour $[p, q]$, $[q, q]$, $[q+1, q+1]$,... leurs valeurs, on aura donc définitivement

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^p.az^{(q)}}{dx^p}\pm\frac{d^q.az^{(p)}}{dx^q} &= \frac{d^q.a^{(r)}z^{(q)}}{dx^q}+\frac{r}{1}\frac{d^{q+1}.a^{(r-2)}z^{(q+1)}}{dx^{q+1}} \\ &+\frac{r(r-3)}{1.2}\frac{d^{q+2}.a^{(r-4)}z^{(q+2)}}{dx^{q+2}} \\ &+\frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3}\frac{d^{q+3}.a^{(r-6)}z^{(q+3)}}{dx^{q+3}}+\ldots, \end{aligned}\right.$$

série qui finit d'elle-même lorsque les dérivées de a cessent d'avoir un sens, et où l'on prendra le signe supérieur ou inférieur suivant que la différence $p-q=r$ sera paire ou impaire. Le dernier terme de ce développement sera dans le premier cas

$$2\frac{d^{q+\frac{r}{2}}.az^{\left(q+\frac{r}{2}\right)}}{dx^{q+\frac{r}{2}}},$$

et dans le second

$$r\cdot\frac{d^{q+\frac{r-1}{2}}.a'z^{\left(q+\frac{r-1}{2}\right)}}{dx^{q+\frac{r-1}{2}}}.$$

L'indice $q+\frac{r}{2}=\frac{p+q}{2}$, ou $q+\frac{r-1}{2}=\frac{p+q-1}{2}$

qui affecte ce dernier terme, est nécessairement inférieur à n, puisque p est tout au plus égal à n, et $p > q$. Cette observation est importante, car elle prouve que les binômes Z_{pq} qui font partie de $\Phi(z)$ et qu'on ramène à la forme (6) par les développements qui précèdent, ne peuvent contribuer en rien à la formation du terme $\frac{d^n . A_n z^{(n)}}{dx^n}$, lequel, par suite, devra son existence uniquement au dernier des monômes (7). Il est donc démontré non-seulement qu'on peut développer $\Phi(z)$ en une série de la forme (6), mais aussi qu'on aura dans le dernier terme de ce développement,

$$A_n = a_{nn} = \frac{d^2\varphi}{dz^{(n)2}}.$$

87. Revenons à l'expression $\Phi(z)$ que nous venons de mettre sous la forme

$$\Phi(z) = A_0 z - \frac{d . A_1 z'}{dx} + \frac{d^2 . A_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n . A_n z^{(n)}}{dx^n}.$$

Si nous y remplaçons z et ses dérivées z', z'', ..., par une autre fonction u et ses dérivées u', u'', ..., elle deviendra

$$\Phi(u) = A_0 u - \frac{d . A_1 u'}{dx} + \frac{d^2 . A_2 u''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n . A_n u^{(n)}}{dx^n}.$$

Cela posé, nous allons démontrer que la différence

$$u\Phi(z) - z\Phi(u)$$

est une dérivée exacte, quelles que soient les fonctions u et z.

Considérons en effet deux termes correspondants quelconques

$$(-1)^p \left\{ u \frac{d^p . A_p z^{(p)}}{dx^p} - z \frac{d^p . A_p u^{(p)}}{dx^p} \right\},$$

de cette différence, et rappelons-nous que, d'après un théorème connu du calcul différentiel, on a

$$u\frac{d^p.A_p z^{(p)}}{dx_p} = (-1)^p\left\{A_p z^{(p)} u^{(p)} - \frac{p}{1}\frac{d.A_p z^{(p)} u^{(p-1)}}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2.A_p z^{(p)} u^{(p-2)}}{dx^2} - \ldots\right\},$$
$$z\frac{d^p.A_p u^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p\left\{A_p u^{(p)} z^{(p)} - \frac{p}{1}\frac{d.A_p u^{(p)} z^{(p-1)}}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2.A_p u^{(p)} z^{(p-2)}}{dx^2} - \ldots\right\};$$

si l'on retranche la seconde équation de la première, et qu'on fasse, pour abréger,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} U_0 &= A_p[u^{(p)} z^{(p)} - u^{(p)} z^{(p)}] = 0,\\ U_1 &= \frac{p}{1} A_p[u^{(p)} z^{(p-1)} - u^{(p-1)} z^{(p)}],\\ U_2 &= \frac{p(p-1)}{1.2} A_p[u^{(p)} z^{(p-2)} - u^{(p-2)} z^{(p)}],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ U_p &= A_p[u^{(p)} z - u z^{(p)}], \end{aligned}\right.$$

le couple de termes que nous considérons, deviendra

$$(-1)^p\left\{u\frac{d^p.A_p z^{(p)}}{dx^p} - z\frac{d^p.A_p u^{(p)}}{dx^p}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{U_1 - \frac{dU_2}{dx} + \ldots \mp \frac{d^{p-1}U_p}{dx^{p-1}}\right\}.$$

Si, dans cette équation, on donne successivement à p toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à n et qu'on ajoute les différents résultats ainsi obtenus, on trouvera la différence $u\Phi(z) - z\Phi(u)$ exprimée par une suite de dérivées exactes; cette différence sera donc bien elle-même une dérivée exacte.

88. Examinons en particulier la forme que prend la différence $u\Phi(z) - z\Phi(u)$, lorsqu'on y fait $z = uz_1$,

z_1 étant une nouvelle fonction quelconque de x. Si, dans les équations (11), on substitue à z et à ses dérivées les valeurs

$$\begin{aligned}
z &= uz_1,\\
z' &= uz'_1 + u'z_1,\\
z'' &= uz''_1 + 2u'z'_1 + u''z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z^{(p)} &= uz_1^{(p)} + \frac{p}{1}u'z_1^{(p-1)} + \frac{p(p-1)}{1.2}u''z_1^{(p-2)} + \ldots + u^{(p)}z_1,
\end{aligned}$$

$U_1, U_2, \ldots, U_p$ deviendront des fonctions linéaires de $z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(p)}$ et le coefficient de $z_1^{(s)}$ dans le développement de U_r sera

$$\frac{A_p}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots s}\left\{\begin{array}{l} p(p-1)\ldots(p-r-s+1)\,u^{(p)}\,u^{(p-r-s)} \\ -p(p-1)\ldots(p-r+1)\,p(p-1)\ldots(p-s+1)\,u^{(p-r)}\,u^{(p-s)}\end{array}\right\},$$

expression qui reste la même lorsqu'on permute entre eux les indices r, s. Ainsi $U_1, U_2, \ldots, U_p$ seront exprimées par des équations linéaires en $z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(p)}$; dans lesquelles les coefficients seront les mêmes sur les lignes horizontales et sur les lignes verticales de même rang; il en résulte qu'on peut les représenter par les dérivées partielles d'une fonction ψ_p homogène, entière et du second degré de $z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(p)}$, de sorte que

$$U_1 = \frac{d\psi_p}{dz'_1}, \quad U_2 = \frac{d\psi_p}{dz''_1}, \ldots, \quad U_p = \frac{d\psi_p}{dz_1^{(p)}}.$$

Dès lors, si l'on ajoute les équations (11) après les avoir multipliées respectivement par $z_1, z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(p)}$, le

premier membre sera $2\psi_p$, tandis que le second membre

$$A_p u^{(p)} \left\{ z^{(p)} z_1 + \frac{p}{1} z^{(p-1)} z'_1 + \ldots + z z_1^{(p)} \right\}$$
$$- A_p z^{(p)} \left\{ u^{(p)} z_1 + \frac{p}{1} u^{(p-1)} z'_1 + \ldots + u z_1^{(p)} \right\}$$

se réduira à

$$A_p \left\{ u^{(p)} \frac{d^p . z z_1}{dx^p} - z^{(p)} \frac{d^p . u z_1}{dx^p} \right\};$$

on aura donc

$$(12) \qquad \psi_p = \frac{1}{2} A_p \left\{ u^{(p)} \frac{d^p . z z_1}{dx^p} - z^{(p)} \frac{d^p . u z_1}{dx^p} \right\},$$

valeur symbolique, ou abrégée, de la fonction homogène du second degré en z'_1, $z''_1, \ldots$, $z_1^{(p)}$, dont les dérivées partielles représentent les quantités $U_1, U_2, \ldots, U_p$. On obtiendra la valeur de ψ_p, sous la forme définitive, en remplaçant z par uz_1 et effectuant les différentiations indiquées.

Les différents couples de termes dont se compose la différence $u\Phi(z) - z\Phi(u)$, s'expriment ainsi par les dérivées partielles de certaines quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, fonctions homogènes du second degré en $z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(n)}$. Donc, si l'on fait

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots \psi_n,$$

ψ sera encore une fonction homogène de $z'_1, z''_1, \ldots, z_1^{(n)}$ du second degré, et l'on aura

$$(13) \quad u\Phi(z) - z\Phi(u) = \frac{d}{dx} \left\{ \psi'(z'_1) - \frac{d . \psi'(z''_1)}{dx} + \ldots \mp \frac{d^{n-1} . \psi'(z_1^{(n)})}{dx^{n-1}} \right\}.$$

Il est essentiel de se rappeler qu'un terme quelconque ψ_p de la somme $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots \psi_n$ ne renferme les dérivées de z_1 que jusqu'à l'ordre p inclusivement, car il en résulte que le carré $z_1^{(n)2}$ entre uniquement

dans le dernier terme ψ_n, où il a pour coefficient $-\frac{1}{2}A_n u^2$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d^2\psi}{dz_1^{(n)2}} = -A_n u^2.$$

89. Admettons maintenant que u soit une valeur connue de z qui satisfasse à l'équation différentielle $\Phi(z)=0$, en sorte que

$$\Phi(u) = 0$$

soit une équation identique, et faisons, pour abréger,

$$\Phi_1(z'_1) = -\psi'(z'_1) + \frac{d.\psi'(z''_1)}{dx} - \dots \pm \frac{d^{n-1}\psi'(z_1^{(n)})}{dx^{n-1}};$$

l'équation (13) donnera, en intégrant,

$$\int u\Phi(z)\,dx = -\Phi_1(z'_1).$$

Le procédé qui nous a conduits à transformer $\Phi(z)$ (n° 85), s'appliquera également à l'expression $\Phi_1(z'_1)$, puisqu'elle dérive d'une fonction homogène ψ du second degré de la même manière que $\Phi(z)$ se déduit de la fonction homogène φ. Donc, $\Phi_1(z'_1)$ pourra aussi se développer en une série analogue à (6), et l'équation précédente prendra la forme définitive

$$(14)\qquad \int u\Phi(z)\,dx = -B_1 z'_1 + \frac{d.B_2 z''_1}{dx} - \dots \pm \frac{d^{n-1}.B_n z_1^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

$B_1, B_2, \dots, B_n$ étant des fonctions de $x, u, u', \dots, u^{(n)}$ faciles à calculer dans chaque cas particulier. Notons ici seulement que la dernière de ces fonctions, en vertu de ce qui précède, aura pour valeur

$$B_n = -\frac{d^2\psi}{dz_1^{(n)2}} = A_n u^2.$$

90. En résumant les résultats auxquels nous sommes parvenus, nous pouvons maintenant énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — Si φ est une fonction homogène du second degré en z, z', z'', ..., $z^{(n)}$, l'expression

$$\varphi'(z) - \frac{d.\varphi'(z')}{dx} + \frac{d^2.\varphi'(z'')}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.\varphi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

sera une fonction linéaire de z, z', z'', ..., $z^{(2n)}$, qu'on pourra mettre sous la forme

$$A_0 z - \frac{d.A_1 z'}{dx} + \frac{d^2.A_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.A_n z^{(n)}}{dx^n},$$

et l'on aura

$$A_n = \frac{d^2\varphi}{dz^{(n)2}}.$$

Théorème II. — Si u est une valeur particulière quelconque de z qui satisfait à l'équation différentielle

$$\Phi(z) = A_0 z - \frac{d.A_1 z'}{dx} + \frac{d^2.A_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.A_n z^{(n)}}{dx^n} = 0,$$

et qu'on fasse $z = uz_1$, le produit $u\Phi(z)$ sera une dérivée exacte, quelle que soit la fonction z_1 ; son intégrale prendra la forme

$$\int u\Phi(z)\,dx = -B_1 z'_1 + \frac{d.B_2 z''_1}{dx} - \ldots \pm \frac{d^{n-1}B_n z_1^{(n)}}{dx^n},$$

et l'on aura

$$B_n = A_n u^2.$$

91. Ces deux théorèmes nous serviront à effectuer les transformations nécessaires pour mettre en évidence le signe de la variation seconde $\delta^2 S$. Lorsque les valeurs limites de x, y, y', y'', ..., y^{n-1} sont fixes, cette variation

est, comme nous l'avons déjà vu,

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \delta(P)\,\delta y \,.\, dx,$$

et l'on a, d'après la signification connue de (P),

$$\delta(P) = \delta P - \frac{d\,\delta P_1}{dx} + \frac{d^2\,\delta P_2}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n\,\delta P_n}{dx^n}.$$

Or, en faisant, pour abréger,

$$z = \delta y, \quad a_{rs} = \frac{d^2 V}{dy^{(r)}\,dy^{(s)}},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\delta P &= a_{00}\,z + a_{01}\,z' + a_{02}\,z'' + \ldots + a_{0n}\,z^{(n)},\\
\delta P_1 &= a_{10}\,z + a_{11}\,z' + a_{12}\,z'' + \ldots + a_{1n}\,z^{(n)},\\
\delta P_2 &= a_{20}\,z + a_{21}\,z' + a_{22}\,z'' + \ldots + a_{2n}\,z^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\delta P_n &= a_{n0}\,z + a_{n1}\,z' + a_{n2}\,z'' + \ldots + a_{nn}\,z^{(n)}.
\end{aligned}$$

Les seconds membres de ces équations sont évidemment les dérivées partielles de la fonction homogène du second degré

$$\begin{aligned}
\varphi = \frac{1}{2}\,a_{00}\,zz + {} & a_{01}\,zz' + a_{02}\,zz'' + \ldots + a_{0n}\,zz^{(n)}\\
& + \frac{1}{2}\,a_{11}\,z'z' + a_{12}\,z'z'' + \ldots + a_{1n}\,z'z^{(n)},\\
& \qquad + \frac{1}{2}\,a_{22}\,z''z'' + \ldots + a_{2n}\,z''z^{(n)},\\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2}\,a_{nn}\,z^{(n)}z^{(n)},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\delta P = \varphi'(z), \quad \delta P_1 = \varphi'(z'), \quad \delta P_2 = \varphi'(z''), \ldots, \quad \delta P_n = \varphi'(z^{(n)});$$

on aura par conséquent

$$\delta(\mathrm{P}) = \varphi'(z) - \frac{d.\varphi'(z')}{dx} + \frac{d^2.\varphi'(z'')}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.\varphi'(z^{(n)})}{dx^n},$$

expression à laquelle, en vertu du théorème I, on peut donner la forme

$$\mathrm{A}_0 z - \frac{d.\mathrm{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n.\mathrm{A}_n z^{(n)}}{dx^n} = \Phi(z),$$

et la variation seconde deviendra

$$(15) \qquad \delta^2 \mathrm{S} = \int_{x_1}^{x_2} z\Phi(z)\,dx.$$

Nous savons d'ailleurs que $\delta(\mathrm{P}) = \Phi(z) = 0$ est une équation différentielle à laquelle on satisfait de la manière la plus générale en donnant à δy ou à z la forme (4), en sorte que, si l'on fait

$$u = \alpha_1 \frac{df}{da_1} + \alpha_2 \frac{df}{da_2} + \ldots + \alpha_{2n} \frac{df}{da_{2n}},$$

on aura identiquement, ou pour des valeurs quelconques de x, $\Phi(u) = 0$; d'où l'on conclura, d'après le théorème II, que $u\Phi(z)$ est la dérivée exacte d'une expression de la forme

$$-\mathrm{B}_1 z'_1 + \frac{d.\mathrm{B}_2 z''_1}{dx} - \ldots \pm \frac{d^{n-1}.\mathrm{B}_n z_1^{(n)}}{dx^{n-1}} = -\Phi_1(z'_1),$$

dans laquelle

$$z = uz_1, \quad z'_1 = \frac{d\frac{z}{u}}{dx}.$$

Comme la fonction z et ses dérivées $z', z'', \ldots, z^{(n-1)}$ sont nulles aux deux limites de l'intégrale, en vertu de l'hypothèse admise n° 81, il en sera de même de z_1 et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, du moins si l'on choisit

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ de manière que u ne soit nul pour aucune des limites.

92. Cela posé, si nous remplaçons z par uz_1, nous trouverons, en intégrant par parties,

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} z_1 u \Phi(z)\, dx = -\Big|_{x_1}^{x_2} z_1 \Phi_1(z'_1) + \int_{x_1}^{x_2} z'_1 \Phi_1(z'_1)\, dx,$$

ou simplement

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} z'_1 \Phi_1(z'_1)\, dx,$$

puisque z_1, comme nous venons de le dire, est nul aux deux limites de l'intégrale.

Cette nouvelle intégrale se transformera de la même manière, dès qu'on aura trouvé une valeur quelconque de z'_1 qui satisfasse à l'équation différentielle $\Phi_1(z'_1) = 0$. Or, comme

$$u\Phi(z) = -\frac{d.\Phi_1(z'_1)}{dx},$$

à chaque valeur de z qui rendra $\Phi(z)$ nul, correspondra, en vertu de la relation $z = uz_1$, une valeur de z_1 qui rendra $\Phi_1(z'_1)$ constante, et si nous posons

$$v = \beta_1 \frac{df}{da_1} + \beta_2 \frac{df}{da_2} + \ldots + \beta_{2n} \frac{df}{da_{2n}}, \quad v = uv_1,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots,$ étant un nouveau système de constantes arbitraires, l'équation $\Phi(z) = 0$ se trouvera satisfaite quand on donnera à z la valeur v, ce qui revient à remplacer z'_1 par v'_1. Donc la valeur v'_1 de z'_1 réduira la fonction $\Phi_1(z'_1)$ à une constante, ou fera qu'elle ne dépende plus de x, mais uniquement des valeurs attribuées aux constantes arbitraires α, β, dont on pourra disposer de manière à rendre cette fonction nulle, ou à vérifier identiquement

l'équation $\Phi_1(v'_1) = 0$. Dès lors en faisant

$$z'_1 = v'_1 z'_2,$$

on conclura du théorème II que $v'_1 \Phi_1(z'_1)$ est la dérivée exacte d'une expression

$$-C_2 z''_2 + \frac{d.C_3 z'''_2}{dx} - \ldots \mp \frac{d^{n-2}.C_n z_2^{(n)}}{dx^{n-2}} = -\Phi_2(z''_2),$$

et qu'ainsi une nouvelle intégration par parties ramènera la variation seconde à la forme

$$(16) \qquad \delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} z''_2 \Phi_2(z''_2) dx.$$

A chaque valeur de z'_1 qui rend $\Phi_1(z'_1)$ nul, correspond, en vertu de la relation $z'_1 = v'_1 z'_2$ une valeur de z''_2 qui réduira $\Phi_2(z''_2)$ à une constante; or si l'on pose

$$w = \gamma_1 \frac{df}{da_1} + \gamma_2 \frac{df}{da_2} + \ldots + \gamma_{2n} \frac{df}{da_{2n}}, \quad w = u w_1, \quad w'_1 = v'_1 w'_2,$$

on pourra disposer des nouvelles constantes arbitraires $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, de manière à vérifier l'équation $\Phi_1(w'_1) = 0$; donc w''_2 sera une valeur de z''_2 qui rendra la fonction $\Phi_2(z''_2)$ indépendante de x, et qui par une nouvelle relation convenable entre les constantes arbitraires rendra cette fonction nulle, en sorte que l'équation $\Phi_2(w''_2) = 0$ sera identiquement vérifiée. Dès lors, si l'on fait

$$z''_2 = w''_2 z''_3,$$

la variation seconde prendra la forme

$$(17) \qquad \delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} z'''_3 \Phi_3(z'''_3) dx.$$

Une nouvelle transformation semblable conduira à exprimer la variation seconde par une nouvelle fonction indéterminée z^{IV}_4, et amènera $2n$ nouvelles constantes

arbitraires, liées entre elles par trois équations de condition. En continuant ainsi, on arrivera nécessairement à une équation

$$(18) \qquad \delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} z_n^{(n)} \Phi_n (z_n^{(n)})\, dx,$$

dans laquelle $\Phi_n(z_n^{(n)})$ aura la forme $Q_n z_n^{(n)}$. Le coefficient Q_n est d'ailleurs facile à déterminer, car on a

$$A_n = \frac{d^2 V}{dy^{(n)2}}, \quad B_n = A_n u^2, \quad C_n = B_n v_1'^2, \quad D_n = C_n w_2''^2, \text{ etc.},$$

et par suite,

$$Q_n = \frac{d^2 V}{dy^{(n)2}} u^2 v_1'^2 w_2''^2 \ldots,$$

valeur qui, substituée dans la variation seconde, lui fait prendre la forme

$$(19) \qquad \delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy^{(n)2}} \left[u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)}\right]^2 dx.$$

93. Avant de tirer de cette forme dernière de $\delta^2 S$ des conclusions définitives, il est bon de rappeler les substitutions qui y ont conduit, et de passer en revue les diverses formules qui doivent servir au calcul du facteur $u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)}$. Soit toujours

$$y = f(x, a_1, a_2 \ldots a_{2n})$$

l'expression la plus générale de y en x qui satisfasse à l'équation différentielle de l'ordre $2n$, $(P) = 0$, et dont on a déterminé les $2n$ constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots$ de manière à rendre nulle la variation complète de l'intégrale $S = \int V dx$. Pour amener la variation seconde à

la forme voulue, on écrira d'abord les n équations

$$(20)\quad \begin{cases} u = \alpha_1 \dfrac{df}{da_1} + \alpha_2 \dfrac{df}{da_2} + \ldots + \alpha_{2n} \dfrac{df}{da_{2n}}, \\ v = \beta_1 \dfrac{df}{da_1} + \beta_2 \dfrac{df}{da_2} + \ldots + \beta_{2n} \dfrac{df}{da_{2n}}, \\ w = \gamma_1 \dfrac{df}{da_1} + \gamma_2 \dfrac{df}{da_2} + \ldots + \gamma_{2n} \dfrac{df}{da_{2n}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des constantes arbitraires en nombre $2n^2$; ensuite on fera successivement

$$(21)\quad \begin{cases} v = uv_1, \quad w = uw_1, \ldots, \quad z = uz_1, \\ \qquad w'_1 = v'_1 w'_2, \ldots, \quad z'_1 = v'_1 z'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad z''_2 = w''_2 z''_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et l'on tirera l'une après l'autre de ces équations les valeurs des quantités $u, v'_1, w''_2, \ldots$ exprimées au moyen des fonctions $\dfrac{df}{da_1}, \dfrac{df}{da_2}, \ldots, \dfrac{df}{da_{2n}}$, et des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Ces constantes ne sont pas tout à fait indépendantes les unes des autres, car elles doivent satisfaire aux $\dfrac{n(n-1)}{1.2}$ équations suivantes :

$$(22)\quad \begin{cases} \Phi_1(v'_1) = 0, \quad \Phi_1(w'_1) = 0, \ldots, \\ \qquad\qquad \Phi_2(w''_2) = 0, \ldots, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, étant définies par les équations

$$\int u\Phi(z)dx = -\Phi_1(z'_1), \quad \int v'_1\Phi_1(z'_1) = -\Phi_2(z''_2), \ldots.$$

Ajoutons que le nombre de constantes réellement indépendantes éprouve encore une réduction considérable par le fait que le produit $uv'_1w''_2\ldots z_n^{(n)}$ ne renferme que des

combinaisons particulières de α, β, γ, ..., ou plutôt seulement les rapports de ces combinaisons, entre lesquelles il existe en outre un certain nombre de relations identiques. Nous ne pouvons signaler ici que d'une manière vague cette réduction, qui se présente d'ailleurs d'elle-même dans les cas particuliers.

Le facteur $z_n^{(n)}$, le seul qui dépende de la variation δy ou z, est une fonction linéaire de z, z', z'', ..., $z^{(n)}$, comme on le prouverait sans peine en exprimant successivement z'_1, z''_2, ... en z à l'aide de la dernière colonne des équations (21), auxquelles on peut donner la forme

$$z'_1 = \frac{d\frac{z}{u}}{dx}, \quad z''_2 = \frac{d\frac{z'_1}{v'_1}}{dx}, \ldots$$

94. La théorie des déterminants fournit du reste un moyen très-simple d'exprimer le produit $uv'_1w''_2\ldots z_n^{(n)}$ en fonction de u, v, w, ..., z, comme l'a prouvé M. Hesse (*Journal de Crelle*, t. LIV, p. 227 et suiv.) dans un excellent Mémoire, auquel nous avons emprunté une partie des développements qui précèdent. M. Hesse commence par énoncer le théorème suivant :

« En désignant par a, b, c, ..., $n+1$ fonctions d'une seule variable et par a', a'', ..., $a^{(n)}$ les dérivées successives de la première fonction, par b', b'', ..., $b^{(n)}$ celles de la seconde, etc., on a

$$\begin{vmatrix} (\lambda a) & (\lambda a)' \ldots (\lambda a)^{(n)} \\ (\lambda b) & (\lambda b)' \ldots (\lambda b)^{(n)} \\ (\lambda c) & (\lambda c)' \ldots (\lambda c)^{(n)} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \lambda^{n+1} \begin{vmatrix} a & a' \ldots a^{(n)} \\ b & b' \ldots b^{(n)} \\ c & c' \ldots c^{(n)} \\ \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

λ étant une constante ou une fonction quelconque de la variable indépendante. »

On établirait sans peine ce théorème en développant les dérivées qui entrent dans le premier membre, et s'appuyant de ces deux propriétés connues des déterminants : 1° qu'on peut ajouter ou retrancher à tous les éléments d'une même colonne des quantités respectivement proportionnelles aux élémens d'une autre, sans altérer la valeur du déterminant; 2° que si l'on multiplie chaque élément d'une colonne par un même facteur λ, le déterminant entier se trouvera multiplié par λ.

Cela posé, considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} u & u' & \ldots & u^{(n)} \\ v & v' & \ldots & v^{(n)} \\ w & w' & \ldots & w^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z & z' & \ldots & z^{(n)} \end{vmatrix};$$

remplaçons $u, v, w, \ldots z$ par leurs valeurs,

$$u.1,\quad uv_1,\quad uw_1,\ldots,\quad uz_1$$

tirées de la première ligne des équations (21), il viendra

$$D = u^{n+1} \begin{vmatrix} v'_1 & v''_1 & \ldots & v^{(n)}_1 \\ w'_1 & w''_1 & \ldots & w^{(n)}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z'_1 & z''_1 & \ldots & z^{(n)}_1 \end{vmatrix}.$$

Substituant à $v'_1, w'_1, \ldots, z'_1$ leurs valeurs

$$v'_1.1,\quad v'_1 w'_2,\ldots,\quad v'_1 z'_2,$$

tirées de la seconde ligne des équations (21), on trouvera

de même

$$D = u^{n+1} v_1'^{(n)} \begin{vmatrix} w_2'' & \ldots & w_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_2'' & \ldots & z_2^{(n)} \end{vmatrix};$$

et, en continuant ainsi, on arrivera enfin à l'équation

$$(23) \qquad D = u^{n+1} v_1'^{n} w_2''^{n-1} \ldots z_n^{(n)}.$$

Le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} u & u' & \ldots & u^{(n-1)} \\ v & v' & \ldots & v^{(n-1)} \\ w & w' & \ldots & w^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

qui se déduit de D en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, se réduira de même à

$$D_n = u^n v_1'^{n-1} w_2''^{n-2} \ldots.$$

En divisant le premier déterminant par le second, on aura

$$(24) \qquad \frac{D}{D_n} = u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)};$$

c'est la valeur cherchée du produit en question, et la variation seconde deviendra, par conséquent,

$$(25) \qquad \delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy^{(n)2}} \frac{D^2}{D_n^2} dx.$$

La variation δy ou z, avec ses dérivées, entre uniquement dans le numérateur D, et si l'on représente par D_p la dérivée $\frac{dD}{dz^{(p)}}$, laquelle à son tour est un déterminant indépendant de $z, z', \ldots, z^{(n)}$, le rapport des deux déter-

minants contenus dans $\delta^2 S$ s'exprimera ainsi :

$$\frac{D}{D_n} = \frac{D_0 z + D_1 z' + \ldots + D_n z^{(n)}}{D_n}.$$

95. Cette discussion a été nécessairement un peu longue, mais par compensation les conclusions qu'on en tire sont très-simples. La forme (19) ou (25) à laquelle nous avons pu ramener la variation seconde de l'intégrale $\int V dx$, prouve, en effet, que le caractère distinctif du maximum et du minimum se trouve uniquement dans la dérivée partielle du second ordre

$$\frac{d^2 V}{dy^{(n)2}}.$$

Si cette dérivée reste toujours positive ou toujours négative entre les limites de l'intégrale pour la relation entre x et y soumise à l'examen, cette relation correspondra dans le premier cas à un minimum, dans le second à un maximum de l'intégrale; mais si elle change de signe entre les limites dont il s'agit, il n'y aura ni maximum ni minimum. Dans ce cas, en effet, on pourrait évidemment disposer de la fonction arbitraire z ou δy, contenue dans le facteur D, de manière à rendre à son gré la partie positive de l'intégrale (25) plus grande ou plus petite que la partie négative, et par conséquent la variation seconde $\delta^2 S$ serait elle-même susceptible de changer de signe.

Dans ce que nous venons de dire, nous avons supposé implicitement que ni la dérivée $\frac{d^2 V}{dy^{(n)2}}$, ni le facteur $\frac{D}{D_n}$ ne deviennent infinis pour aucune valeur de x comprise entre les limites x_1, x_2, et nos conclusions ne seraient plus légitimes s'il en était autrement, parce qu'alors la variation seconde $\delta^2 S$ pourrait elle-même devenir infinie, ce qui rendrait incertaine l'existence du maximum ou du minimum. La règle que nous avons énoncée ne sera donc rigou-

reusement établie, qu'autant qu'il sera démontré qu'on peut trouver pour les constantes $\alpha, \beta, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots,$ un système de valeurs qui satisfasse à la fois aux conditions (22) et qui ne rende D_n nul pour aucune valeur de x comprise entre les limites de l'intégrale. La question de reconnaître s'il existe ou non un pareil système de valeurs, est en réalité la partie la plus délicate de la théorie de Jacobi, et elle attend encore sa solution générale.

Nous n'avons plus à examiner ici le cas où $\frac{D}{D_n}$ pourrait être constamment nul entre les limites de l'intégrale, car nous avons déjà fait remarquer, au commencement de cette leçon, que si l'on pouvait admettre une valeur de δy qui rendît constamment nulle la fonction sous le signe intégral dans la variation seconde, on n'aurait affaire ni à un maximum ni à un minimum de l'intégrale proposée.

96. Après avoir exposé la méthode générale par laquelle on distingue les maxima et les minima des intégrales simples, renfermant une seule fonction inconnue y avec ses dérivées successives jusqu'à un ordre quelconque, nous allons faire l'application de cette méthode aux cas particuliers les plus ordinaires.

Supposons d'abord que dans l'intégrale

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx,$$

dont il s'agit de trouver le maximum ou le minimum, V ne renferme que x et y; soit de plus

$$y = f(x)$$

la valeur de y qui rend nulle la variation première de l'intégrale, la variation seconde se réduira, pour cette

même valeur de y, à

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 . dx,$$

d'où il résulte immédiatement que le maximum ou le minimum a toujours lieu, lorsque la dérivée $\frac{d^2 V}{dy^2}$ reste constamment soit négative soit positive, sans devenir infinie, mais qu'il n'y a, au contraire, ni maximum ni minimum toutes les fois que cette dérivée change de signe entre les limites de l'intégrale.

97. Considérons en second lieu le cas où la fonction V dans l'intégrale $\int V dx$ renferme x, y, y'. Soit

$$y = f(x, a_1, a_2)$$

la solution qui rend nulle la variation première; désignons, pour abréger, par r_1, r_2 les dérivées partielles $\frac{df}{da_1}$, $\frac{df}{da_2}$. Nous avons vu (nº 82) qu'en donnant à δy la valeur $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$, α_1, α_2 étant des constantes arbitraires, on rendrait nulle la variation seconde $\delta^2 S$, et qu'il n'y aurait, par conséquent, ni maximum ni minimum, si δy pouvait recevoir cette valeur dans les conditions du problème, qui exigent que δy soit nulle aux deux limites de l'intégrale. La première condition du maximum ou du minimum est donc que l'équation

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{r_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = m,$$

m étant arbitraire, ne puisse avoir lieu à la fois aux deux limites de l'intégrale, ni même pour deux valeurs quelconques de x comprises entre x_1 et x_2, c'est-à-dire que le

rapport $\frac{r_1}{r_2}$ ne passe pas deux fois par une même valeur m, lorsque x augmente continuellement depuis x_1 jusqu'à x_2.

Si cette condition est remplie, on examine de plus près la variation seconde

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \delta(P)\, \delta y\, dx,$$

laquelle, en faisant $z = \delta y$ et $u = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$, prend la forme

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy'^2} \frac{(uz' - u'z)^2}{u^2}\, dx.$$

Comme la variation seconde ne peut non plus devenir infinie, sans que l'existence du maximum ou du minimum soit compromise, il faut en second lieu qu'on puisse assigner aux constantes arbitraires α_1, α_2 des valeurs telles, que le dénominateur u ne s'évanouisse pas, c'est-à-dire que l'équation

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{r_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = m$$

ne soit vérifiée pour aucune valeur de x comprise entre x_1 et x_2. Or cela est toujours possible pourvu qu'il existe une valeur que le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ ne prenne pas entre les limites de l'intégrale, puisqu'il suffit alors de donner à m ou à $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ précisément cette valeur. La nouvelle condition du maximum ou du minimum est donc que le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ ne prenne pas, entre les limites de l'intégrale toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ jouit d'une propriété remarquable que nous allons indiquer. Comme r_1 et r_2 aussi bien que la fonction plus générale $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ sont des valeurs de δy ou de z qui rendraient nulle l'expression $\delta(\mathrm{P})$, à laquelle on peut donner la forme $\mathrm{A}_0 z - \frac{d.\mathrm{A}_1 z'}{dx}$, on aura identiquement

$$\mathrm{A}_0 r_1 - \frac{d.\mathrm{A}_1 r'_1}{dx} = 0, \quad \mathrm{A}_0 r_2 - \frac{d.\mathrm{A}_1 r'_2}{dx} = 0,$$

ou bien, en éliminant A_0 et intégrant,

$$\mathrm{A}_1 (r_2 r'_1 - r_1 r'_2) = \mathrm{C}, \quad \frac{d\frac{r_1}{r_2}}{dx} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}_1 r_2^2}.$$

Cette dernière équation, dans laquelle C est une constante arbitraire, et $\mathrm{A}_1 = \frac{d^2\mathrm{V}}{dy'^2}$, montre que la dérivée de $\frac{r_1}{r_2}$ ne change pas de signe quand $\frac{d^2\mathrm{V}}{dy'^2}$ n'en change point, ce qui d'ailleurs est une des conditions essentielles du maximum ou du minimum. Il en résulte que le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ est sans cesse croissant ou décroissant; que s'il est croissant, après avoir atteint la valeur $+\infty$, il passera brusquement à $-\infty$ pour croître de nouveau; que s'il est décroissant après être devenu égal à $-\infty$, il deviendra subitement $+\infty$ pour décroître encore; de sorte qu'il ne pourra reprendre la même valeur sans passer successivement par toutes les valeurs possibles comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Ainsi les deux restrictions imposées à $\frac{r_1}{r_2}$ par la condition que la variation seconde ne devienne ni nulle ni infinie, se confondent en une seule. On voit en

même temps combien il est essentiel que les limites de l'intégration ne soient pas trop étendues. En effet, si l'on fait croître la variable x à partir de la limite inférieure x_1, le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ croîtra ou décroîtra d'une manière continue et pourra, après avoir passé une fois par l'infini, reprendre, pour une certaine valeur de x, la valeur qu'il avait pour $x = x_1$; cette seconde valeur de x est la limite supérieure jusqu'à laquelle ou au delà de laquelle l'intégration ne doit pas s'étendre, pour que le maximum ou le minimum puisse avoir lieu.

Ces conditions préliminaires étant remplies, l'intégrale S sera un maximum si la dérivée $\frac{d^2 V}{dy'^2}$ reste constamment négative, un minimum si elle reste constamment positive; mais l'intégrale ne sera ni maximum ni minimum si la dérivée dont il s'agit change de signe entre les limites x_1 et x_2.

98. Considérons encore l'intégrale $\int V dx$ dans laquelle V est fonction de x, y, y', y''; admettons que

$$y = f(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

soit la forme de y qui rende nulle la variation première δS; désignons, pour abréger, par z la variation δy, par r_1, r_2, r_3, r_4 les dérivées partielles $\frac{df}{da_1}, \frac{df}{da_2}, \frac{df}{da_3}, \frac{df}{da_4}$, et posons

$$u = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4,$$

$$v = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \beta_3 r_3 + \beta_4 r_4,$$

$$D = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}$$

la variation seconde prendra la forme

$$\delta^2 S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy''^2} \frac{D^2}{D_2^2} dx.$$

Entre les huit constantes α, β, il existe [(22), n° 93] une certaine équation de condition $\psi_1(v'_1) = 0$, que nous n'examinerons point ici. Il est d'ailleurs facile de voir que ces constantes n'entrent dans les déterminants D et D_2 que par les six combinaisons

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \quad \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1, \quad \alpha_1 \beta_4 - \alpha_4 \beta_1,$$
$$\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \quad \alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2, \quad \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3,$$

liées entre elles par une relation identique; car si, au produit de la première et de la sixième combinaison, on ajoute celui de la troisième par la quatrième, on retrouve identiquement le produit de la seconde par la cinquième. Ajoutons que la variation seconde $\delta^2 S$ ne contient que le rapport de ces combinaisons, de sorte que le nombre des constantes réellement arbitraires se réduit à trois.

Cela posé, pour l'existence du maximum ou du minimum, il faut :

1° Que δy n'admette pas de valeur qui rende nulle la variation seconde $\delta^2 S$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeurs des constantes α_1, α_2, α_3, α_4, différentes de zéro, au moins quant à quelques-unes d'entre elles, qui puissent vérifier l'équation

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 = 0$$

aux deux limites de l'intégrale, ou, en général, pour deux valeurs distinctes de x comprises entre ces limites;

2° Que la variation seconde ne devienne pas infinie, et, en particulier, qu'on puisse assigner aux constantes α, β des valeurs qui ne rendent nul le dénominateur

$D_2 = uv' - u'v$, pour aucune valeur de x comprise entre x_1 et x_2;

3° Que $\frac{d^2 V}{dy''^2}$ ne change pas de signe entre les limites de l'intégrale.

Si ces trois conditions sont remplies, il y aura maximum ou minimum, suivant que la dérivée $\frac{d^2 V}{dy''^2}$ sera négative ou positive.

Nous ne parlerons pas ici de la distinction des maxima et minima des intégrales doubles; les indications qu'on a données à cet égard n'ont guère d'utilité pratique, parce qu'elles reposent sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles, intégration qu'on ne sait presque jamais effectuer.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ET A LA MÉCANIQUE.

NEUVIÈME LEÇON.

Recherche de courbes planes ayant des propriétés de maximum ou minimum. — Ligne la plus courte entre deux points. — Courbe de longueur donnée renfermant l'aire maxima. — Courbe qui engendre la surface de révolution minima. — Courbe de longueur donnée qui engendre la plus grande ou la plus petite surface de révolution. — Courbe de longueur donnée qui engendre le solide de révolution du plus grand ou du plus petit volume. — Courbe génératrice de la surface de révolution qui sous une étendue superficielle donnée renferme le plus grand ou le plus petit volume.

99. Parmi les applications du *Calcul des variations* à la Géométrie, les plus simples sont celles où l'on cherche des courbes planes jouissant de certaines propriétés de maximum ou de minimum. L'équation de la courbe étant rapportée à un système de coordonnées rectangulaires x, y, la question revient toujours à déterminer y en fonction de x de manière à faire acquérir à une certaine intégrale ou à une certaine expression définie sa plus grande ou sa plus petite valeur. La marche à suivre pour résoudre toutes les questions de ce genre ayant été expliquée avec détail dans la sixième leçon, il nous suffira de passer en revue d'un coup d'œil rapide les formules dont nous aurons besoin.

Dans les problèmes dont la résolution sera l'objet de cette leçon, l'intégrale qu'il s'agit de rendre maximum ou minimum ne renferme avec la variable x et la fonc-

tion y que la dérivée du premier ordre y'. La question à résoudre est donc celle-ci :

Étant donnée une fonction V *de* x, y, y', *trouver la relation entre* y *et* x *pour laquelle l'intégrale*

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

devienne maximum ou minimum.

Si l'on appelle P, P_1, les dérivées partielles de V relatives à y, y_1, la variation complète de l'intégrale sera

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(P - \frac{dP_1}{dx}\right) \delta y \,.\, dx$$
$$+ \Big|^{x_2} (V\delta x_2 + P_1 \delta y) - \Big|^{x_1} (V\delta x_1 + P_1 \delta y).$$

La forme cherchée de la fonction y doit rendre δS nulle et par conséquent satisfaire d'abord à l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \qquad P - \frac{dP_1}{dx} = 0,$$

laquelle, par deux intégrations successives, donnera la relation cherchée entre x, y, avec deux constantes arbitraires.

L'équation (1) s'intègre immédiatement une première fois lorsque V ne renferme pas la variable x, mais seulement y, y', et elle conduit alors (n° 61) à l'équation différentielle du premier ordre

$$(2) \qquad V - P_1 y' = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Lorsque V ne renferme pas y, on a $P = 0$, et l'équa-

tion (1), devenue $\frac{dP_1}{dx} = 0$ et intégrée, donne

$$P_1 = \text{constante}.$$

Dans le cas plus particulier encore où V et par conséquent P_1 est fonction de la seule dérivée y', il en résulte $y' =$ constante, et, par suite, en désignant par a et b des constantes arbitraires

$$y = ax + b,$$

équation d'une droite qui est alors la ligne cherchée.

Les équations aux limites se modifient selon les restrictions imposées aux valeurs limites de x, y, ou aux points extrêmes de la courbe cherchée. On remarque surtout les cas suivants :

1° *La courbe doit être menée entre deux points fixes.* — Les valeurs limites de x, y, étant données, la variation δS ne fournira aucune nouvelle condition relative aux limites.

2° *La courbe doit être menée entre deux droites fixes parallèles à l'axe des y.* — Les valeurs limites de x étant données et celles de y restant variables, on aura (n° 57, 1°) les nouvelles conditions

$$\Big|^{x_1} P_1 = 0, \quad \Big|^{x_2} P_1 = 0;$$

on les énonce plus simplement en disant que l'équation

$$(3) \qquad P_1 = 0$$

doit être vérifiée aux deux limites de la courbe.

3° *La courbe doit être menée entre deux droites fixes parallèles à l'axe des x.* — Les valeurs limites de y étant données et celles de x restant variables, on aura

(nº 57, 3º) les équations aux limites

$$\int^{x_1}(\mathrm{V} - \mathrm{P}_1 y') = 0, \quad \int^{x_2}(\mathrm{V} - \mathrm{P}_1 y') = 0,$$

ou, plus simplement,

(4) $$\mathrm{V} - \mathrm{P}_1 y' = 0$$

pour chacune des limites de la courbe. Dans le cas particulier où V ne renferme pas x, nous avons vu que l'équation générale de la courbe prend la forme $\mathrm{V} - \mathrm{P}_1 y' = c$; la condition (4) exige alors qu'on ait $c = 0$.

4º *La courbe doit être menée entre deux lignes quelconques.* — Soit $y = \mathrm{f}(x)$ l'équation de l'une ou de l'autre de ces lignes; les coordonnées de l'extrémité correspondante de la courbe étant assujetties à vérifier cette même équation doivent en outre (nº 57, 4º) satisfaire à celle-ci

(5) $$\mathrm{V} - [y' - \mathrm{f}'(x)]\mathrm{P}_1 = 0,$$

condition qui, en vertu de l'équation (2), se réduit simplement à $c + \mathrm{P}_1 \mathrm{f}'(x) = 0$, lorsque V ne contient pas x.

Les équations aux limites, jointes aux restrictions posées à priori, serviront toujours à déterminer soit les points extrêmes de la courbe, soit les constantes arbitraires contenues dans son équation.

Les formules simples que nous venons de rappeler suffisent à la résolution des problèmes suivants :

Problème I.

100. *Trouver la ligne la plus courte entre deux points donnés.*

La longueur d'une courbe plane étant en général exprimée par l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}.dx,$$

il s'agit de déterminer y en fonction de x de manière que cette intégrale soit un minimum. En conservant les notations du numéro précédent, on a

$$V = \sqrt{1 + y'^2}, \quad P = 0, \quad P_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

et l'équation indéfinie $P - \frac{dP_1}{dx} = 0$ devient

$$\frac{dP_1}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad P_1 = \text{constante.}$$

Il en résulte

$$y' = a,$$

et en intégrant

$$(1) \qquad y = ax + b,$$

équation d'une droite qui est la ligne cherchée. Les constantes arbitraires a et b seront déterminées par la condition que la droite doit passer par les deux points donnés.

L'examen de la variation seconde (n° 97) montre que le minimum a réellement lieu, pourvu que les deux conditions suivantes soient remplies, à savoir : 1° que le rapport des deux dérivées $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$ ne prenne pas la même valeur pour deux valeurs différentes de x, comprises entre les limites de l'intégration ; 2° que la dérivée partielle du second ordre $\frac{d^2V}{dy'^2}$ reste constamment positive entre ces mêmes limites. Or, on a dans le cas actuel

$$\frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dy}{db}} = x, \quad \frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeurs qui satisfont évidemment aux conditions dont il s'agit. Donc la solution (1) correspond à un vrai minimum de l'intégrale proposée.

Considérons maintenant quelques modifications du problème que nous venons de résoudre.

1° Si l'on ne fixe que les limites de x, en laissant indéterminées les valeurs limites de y, ce qui revient à chercher la ligne la plus courte entre deux droites parallèles à l'axe des y, l'équation indéfinie (1) restera la même et l'on aura en outre

$$P_1 = 0, \quad \text{ou} \quad y' = 0,$$

pour les deux limites, ce qui prouve que la ligne minima est perpendiculaire aux deux droites parallèles.

2° Si l'on fixe, au contraire, les valeurs extrêmes de y, sans déterminer celles de x, c'est-à-dire si l'on cherche la ligne la plus courte entre deux droites données parallèles à l'axe des x, l'équation

$$V - P_1 y' = 0,$$

qui alors aura lieu aux deux limites, donne

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad \text{ou} \quad y' = \infty,$$

et prouve ainsi que la ligne cherchée est encore perpendiculaire aux deux droites données.

3° Considérons enfin le cas plus général où les extrémités de la ligne cherchée sont seulement assujetties à se trouver sur deux courbes données. Soit $y = \mathrm{f}(x)$ l'équation de l'une de ces courbes, par exemple de celle qui correspond à la limite inférieure, de sorte que la fonction y soit assujettie à priori à la restriction

$$\int^{x_1} \{y - \mathrm{f}(x)\} = 0;$$

on aura pour la même limite la condition

$$V - [y' - f'(x)]P_1 = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + y' f'(x) = 0,$$

et on en conclura que la ligne cherchée, qui est toujours une ligne droite, est normale à chacune des courbes limites données.

Problème II.

101. *Une courbe plane étant donnée, trouver une seconde courbe de longueur donnée et telle, que l'aire comprise entre les deux courbes soit un maximum.*

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée ; l'aire qu'il faut rendre maximum, et la longueur de l'arc qui doit rester constante, étant exprimées respectivement par les intégrales

$$\int_{x_1}^{x_2} [y - f(x)]\,dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}.\,dx,$$

le problème se réduira à chercher le maximum absolu de la somme

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ y - f(x) - c\sqrt{1 + y'^2} \right\} dx,$$

c étant une quantité constante, mais inconnue, dont on disposera à la fin du calcul de manière que l'arc de courbe cherché ait la longueur requise. On aura

$$V = y - f(x) - c\sqrt{1 + y'^2}, \quad P = 1, \quad P_1 = \frac{-cy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

la formule $P - \dfrac{dP_1}{dx} = 0$ donnera successivement

$$1 - \frac{dP_1}{dx} = 0, \quad P_1 = x - a,$$

$$dy = \frac{\pm (x - a)\,dx}{\sqrt{c^2 - (x - a)^2}},$$

et, en intégrant,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2. \tag{1}$$

équation d'un cercle qui est la ligne cherchée.

Puisque les extrémités de l'arc doivent se trouver sur la courbe donnée, les valeurs limites de x, y sont liées entre elles par les conditions

$$\Big|^{x_1}[y - \mathrm{f}(x)] = 0, \quad \Big|^{x_2}[y - \mathrm{f}(x)] = 0,$$

dont il faut tenir compte dans la recherche des équations aux limites. On trouve alors (nº 57, 4º) pour chacune des limites

$$V - [y' - \mathrm{f}'(x)]P_1 = 0,$$

ou

$$1 + y'\mathrm{f}'(x) = 0, \tag{2}$$

équation qui exprime que les deux courbes sont normales l'une à l'autre aux points de leurs intersections.

Il en résulte, en particulier, que si la première courbe est une droite, la seconde, dont la longueur est donnée et qui circonscrit avec la première la plus grande aire possible, sera une demi-circonférence.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les points extrêmes de l'arc cherché pouvaient se déplacer sur la courbe donnée $y = \mathrm{f}(x)$. Si, au contraire, ces points étaient entièrement fixes, il n'y aurait plus d'équation aux limites, et les constantes a, b, c seraient déterminées par les conditions que l'arc de cercle doit passer par les points fixes et avoir entre ces points une longueur donnée.

Problème III.

102. *Entre deux points donnés, mener une courbe telle, que la surface engendrée par sa révolution autour d'un axe donné soit un minimum.*

Si l'on prend l'axe de révolution pour axe des x, l'intégrale qu'il s'agit de rendre minimum est

$$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

On a donc

$$V = y\sqrt{1+y'^2},\quad P = \sqrt{1+y'^2},\quad P_1 = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

et la fonction y doit satisfaire à l'équation

$$P - \frac{dP_1}{dx} = 0.$$

Or, comme V ne renferme pas explicitement la variable indépendante x, cette équation différentielle du second ordre s'intègre immédiatement une fois (n° 61) et donne

$$V - P_1 y' = a,$$

ou, en substituant les valeurs de V et de P_1,

$$(1)\qquad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a,$$

a étant une constante arbitraire. Il en résulte

$$y' = \pm\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a},\qquad dx = \frac{\pm\, a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}},$$

et, en intégrant de nouveau,

$$x - b = \pm\, a\,l\,\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a},$$

b étant une nouvelle constante arbitraire. De cette dernière équation, on tire successivement

$$y + \sqrt{y^2-a^2} = a e^{\pm\frac{x-b}{a}},$$

$$y - \sqrt{y^2-a^2} = a e^{\mp\frac{x-b}{a}},$$

et par suite

$$(2) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

équation d'une chaînette, qui est la courbe cherchée. Si l'on appelle *directrice* la droite par rapport à laquelle la chaînette a la propriété caractéristique d'avoir son rayon de courbure égal à la normale, on peut ajouter que la chaînette a pour directrice l'axe même de révolution.

Les limites de l'intégrale, ainsi que les valeurs limites de y, étant fixes, il n'y a pas d'équations aux limites; on disposera alors des constantes a et b, de manière à faire passer la chaînette par les deux points donnés. Si ces points n'étaient pas fixes, mais seulement assujettis à se trouver sur deux courbes données, et que $y = \mathrm{f}(x)$ fût l'équation de l'une ou de l'autre de ces courbes, on aurait pour la limite correspondante

$$\mathrm{V} - [y' - \mathrm{f}'(x)]\mathrm{P}_1 = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + y'\mathrm{f}'(x) = 0;$$

la chaînette devrait donc être normale à chacune des courbes limites.

103. Nous venons de dire que, lorsque les deux points extrêmes sont donnés, les constantes a, b doivent être déterminées par la condition même que la chaînette passe par ces points. Mais pour que cela soit possible, c'est-à-dire pour qu'on puisse joindre les deux points donnés par une chaînette ayant pour directrice l'axe de révolution, la distance entre ces points ne doit pas excéder une certaine limite qui dépend de leurs ordonnées ou de leurs distances à l'axe. Remarquons d'abord que si l'on prend pour origine des coordonnées le point de l'axe auquel correspond la plus petite ordonnée $y = a$, on aura $b = 0$;

l'équation de la chaînette prendra la forme plus simple

$$(3)\qquad y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

et l'on trouvera, en divisant par x,

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{\frac{x}{a}}.$$

Or, ce rapport ne peut varier qu'entre certaines limites qui sont les mêmes pour toutes les chaînettes comprises sous la forme (3), ou qui ne diffèrent que par le paramètre a; en effet, pour trouver la valeur de $\frac{x}{a}$ qui rende $\frac{y}{x}$ maximum ou minimum, on pose

$$(4)\qquad \frac{x}{a}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)-\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=0$$

ou

$$e^{\frac{x}{a}}=\sqrt{\frac{\frac{x}{a}+1}{\frac{x}{a}-1}};$$

on trouvera, par des approximations successives,

$$\frac{x}{a}=\pm 1,19968\ldots$$

A cette valeur de $\frac{x}{a}$ correspond

$$\frac{y}{a}=1,81017,\quad \frac{y}{x}=\pm 1,50888.$$

Si l'on fait

$$k=1,50888=\operatorname{tang}(56^\circ 28'),$$

le rapport $\frac{y}{x}$ ne peut avoir de valeur positive ou négative inférieure à $\pm k$; la chaînette se trouvera donc tout entière au-dessus des deux droites passant par l'origine et représentées par les équations

$$y = kx, \quad y = -kx.$$

Ces deux droites sont évidemment tangentes à la chaînette. En effet, on a généralement

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

et l'équation (4), qu'on peut écrire comme il suit,

$$xy' - y = 0,$$

donne

$$y' = \frac{y}{x} = \pm k,$$

ce qui exprime qu'aux deux points de la chaînette pour lesquels l'équation (4) a lieu, et dont nous venons de déterminer les coordonnées, les tangentes passent par l'origine et coïncident avec les deux droites limites.

Il est donc démontré que si l'on mène par l'origine des coordonnées deux droites faisant chacune avec l'axe des x, de part et d'autre, un angle de $56° 28'$ à très-peu près, toute chaînette représentée par l'équation (3) sera comprise dans l'angle supérieur formé par ces droites, et qu'elle sera touchée par ces mêmes droites aux points dont les coordonnées sont $x = \pm 1{,}19968\, a$, $y = 1{,}81017\, a$.

Il en résulte qu'il n'est pas toujours possible de déterminer les constantes a et b dans l'équation (2) de manière à faire passer la chaînette par deux points donnés A et B. Si par le point A on mène une droite AC qui rencontre l'axe de révolution en C sous un angle de

56° 28′, et par le point C une seconde droite CD également inclinée sur cet axe, il faudra que le point B se trouve au-dessus de la droite CD; autrement la chaînette ne pourra plus être tracée, et le problème de minimum n'aura pas de solution.

104. Pour interroger la variation seconde, différentions tour à tour l'équation (2)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$$

par rapport à x, a, b, il viendra

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} - e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right) - \frac{1}{2}\frac{x-b}{a}\left(e^{\frac{x-b}{a}} - e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

$$\frac{dy}{db} = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} - e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

ou

$$\frac{dy}{da} = \frac{y-(x-b)y'}{a}, \quad \frac{dy}{db} = -y'.$$

L'existence du minimum exige d'abord que le rapport des dérivées $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$, et, par conséquent, la fonction $x - \frac{y}{y'}$, ne prenne pas deux fois une même valeur entre les limites x_1, x_2. Or, cette fonction exprime l'abscisse du point où la tangente à la chaînette rencontre l'axe des x. Donc, en admettant que A et B (*fig.* 3, p. 213) soient les points extrêmes de l'arc de chaînette que l'on considère, si par le point A on mène à la chaînette une tangente

AC qui rencontre l'axe des x en C, et par le point C une seconde tangente CD qui touche la chaînette en D, D sera la limite que la seconde extrémité B ne peut ni atteindre ni franchir sans que l'arc AB cesse d'avoir la propriété d'engendrer une surface minima. En d'autres termes, il faut que les tangentes menées à la chaînette aux deux points extrêmes A, B se coupent *au-dessus* de l'axe de révolution, sans cela le minimum n'aura pas lieu.

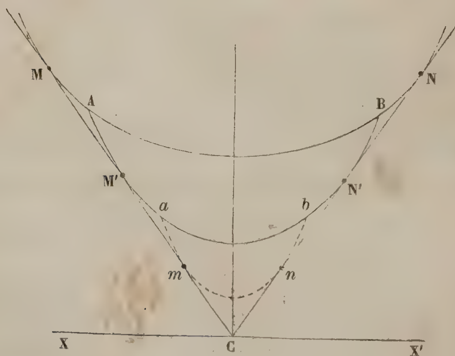
Lorsque cette première condition est remplie, on peut affirmer que l'intégrale proposée est un véritable minimum, puisque la dérivée seconde

$$\frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

reste constamment positive.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mener entre deux points A et B (*fig.* 2), situés à distance égale de l'axe XX', une courbe telle, que l'aire engendrée par sa

Fig. 2.



révolution autour de cet axe soit un minimum. Prenons

sur cet axe un point C également distant de A et de B, et menons les droites CM, CN, faisant l'une et l'autre un angle de 56° 28′ avec l'axe XX′. Cela posé, le problème de minimum n'aura pas de solution si les points A, B se trouvent en dehors de l'angle MCN. Lorsqu'ils sont compris dans cet angle, la courbe cherchée est une chaînette tangente aux deux droites CM, CN. Or, par les points A, B on peut évidemment faire passer deux chaînettes distinctes MABN, AM′N′B, tangentes l'une et l'autre à ces droites. Sur la première les points de contact M, N se trouvent au delà des points A, B ; sur la seconde, au contraire, les points de contact M′, N′ sont compris entre A et B. C'est la première chaînette qui donne seule la solution du problème.

On comprend d'ailleurs facilement pourquoi la chaînette AM′N′B ne peut pas être la courbe cherchée ; car, en admettant qu'elle donnât le minimum, et en prenant sur elle deux points *a*, *b* au-dessous de M′, N′ et à des distances égales de l'axe XX′, ce ne serait plus l'arc *ab*, mais la nouvelle chaînette *amnb* qui donnerait le minimum, et ainsi de suite.

105. Nous ajouterons encore quelques considérations géométriques qui serviront à répandre une nouvelle lumière sur les résultats de cette discussion. La différentielle de l'aire U engendrée par la révolution de la chaînette étant

$$dU = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

si l'on exprime dx par dy et qu'on élimine $\sqrt{1 + y'^2}$ au moyen de l'équation (1), on aura

$$dU = \frac{2\pi y^2\, dy}{\sqrt{y^2 - a^2}},$$

et en intégrant

$$U=\pi\left\{y\sqrt{y^2-a^2}+a^2 l\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right\}+\text{const.}$$

Si l'aire U et les abscisses x sont comptées à partir du cercle engendré par la plus petite ordonnée $y=a$, cette expression deviendra

$$U=\pi\left(y\sqrt{y^2-a^2}+ax\right)=\pi a(yy'+x),$$

x, y étant les coordonnées de l'extrémité de l'arc. Si par le point x, y ou D (*fig.* 3) on mène une tangente à la chaînette, la partie de cette tangente comprise entre la courbe et l'axe, ou la droite DC, sera

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}=a\left(y'+\frac{1}{y'}\right),$$

et la surface conique engendrée par cette droite

$$K=\pi a\left(yy'+\frac{y}{y'}\right).$$

La différence des deux surfaces engendrées par l'arc PD et la tangente CD est donc

$$U-K=\pi a\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\pi a.\text{OC}.$$

En désignant par U_1, K_1 les surfaces engendrées par l'arc AP et par la tangente AC, on trouve de même

$$U_1-K_1=-\pi a.\text{OC}.$$

Ajoutant et transposant, il vient

$$U+U_1=K+K_1.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si par un point C pris sur la directrice d'une chaî-

nette on mène deux tangentes CA, CD *à la chaînette, l'arc* AD *et la ligne brisée* ACD *décriront des surfaces égales en tournant autour de la directrice.*

Fig. 3.

L'analyse nous a démontré que l'arc de chaînette cesse d'engendrer une surface de révolution minima, lorsqu'il s'étend depuis A jusqu'à D, et il est maintenant facile d'en trouver la raison. En diminuant très-peu et dans un même rapport le paramètre a et les distances CA, CD, CO, on détermine les trois points A′, D′, O′, ainsi que la nouvelle chaînette A′ D′ ayant son sommet au-dessus de O′ et tangente aux droites CA, CD dans les points A′, D′. D'après le théorème que nous venons de démontrer, l'arc A′D′ et la ligne brisée A′CD′ décriront aussi des surfaces de révolution égales. On pourrait donc, sans altérer l'aire de la surface de révolution, substituer à la chaînette AD le polygone mixtiligne AA′ D′ D, qui en différera aussi peu qu'on voudra, et en continuant ainsi on passerait par des déformations insensibles de la chaînette AD à la ligne brisée ACD. On pourrait même aller plus loin et substituer à ACD des courbes qui descendissent au-dessous de l'axe des x ; l'intégrale proposée prendrait alors des élé-

ments négatifs et serait susceptible de diminuer sans limite.

Si le minimum analytique cesse d'avoir lieu pour l'arc de chaînette AD, c'est parce qu'on peut la déformer d'une manière continue sans que la surface de révolution augmente, et non pas parce qu'il existe d'autres courbes d'union entre les points A et D qui donnent des surfaces plus petites. Pour l'arc de chaînette AB toutes les conditions analytiques du minimum sont remplies, quoiqu'il soit certain qu'on peut mener entre A et B une infinité de courbes qui, sous la condition de franchir l'axe des x, et quelquefois même sans cette condition, donnent pour l'intégrale proposée des valeurs plus petites. C'est qu'on ne saurait déformer l'arc AB par degrés insensibles sans que la surface de révolution augmente d'abord, sauf à diminuer ensuite; et tel est, à proprement parler, le caractère analytique du minimum. En général, dans le calcul des variations, comme dans le calcul différentiel, le maximum ou le minimum analytique n'est pas toujours la plus grande ou la plus petite de toutes les valeurs possibles, et il peut y avoir quelquefois plusieurs maxima ou minima.

Problème IV.

106. *Parmi toutes les courbes de même longueur, trouver celle qui par sa révolution autour d'un axe donné engendre la plus grande ou la plus petite surface.*

Prenons l'axe de révolution pour axe des x. La longueur de la courbe et la surface engendrée par sa révolution étant respectivement

$$\int\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{et} \quad 2\pi\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

le problème se ramène à chercher le maximum ou minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}(y-c)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

dans laquelle c est une constante dont on disposera pour donner à la courbe la longueur assignée. Ici :

$$V = (y-c)\sqrt{1+y'^2}, \quad P = \sqrt{1+y'^2}, \quad P_1 = \frac{(y-c)\,y'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

comme la variable indépendante x n'entre pas explicitement dans V, l'équation indéfinie

$$P - \frac{dP_1}{dx} = 0$$

s'intègre immédiatement une première fois et donne

$$V - P_1 y' = a, \quad \text{ou} \quad \frac{y-c}{\sqrt{1+y'^2}} = a.$$

De cette équation résolue par rapport à y' ou $\frac{dy}{dx}$, on tirera d'abord la valeur de dx exprimée en dy ; on intégrera et, après quelques transformations semblables à celles de l'exemple précédent, on trouvera

$$y - c = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$$

a et b étant des constantes arbitraires. La courbe est donc encore une chaînette, dont la directrice, parallèle à l'axe de révolution, est située à une distance égale à la valeur numérique de c, au-dessus ou au-dessous de cet axe, suivant que c est positif ou négatif.

Lorsque les points extrêmes sont fixes, on détermine les constantes a, b, c par les conditions que la chaînette doit passer par ces points et avoir une longueur donnée. Or, il est en général possible de satisfaire à ces conditions, de deux manières différentes, ou par deux chaînettes dont l'une tourne sa concavité et l'autre sa convexité vers l'axe de révolution. La première chaînette

donne la plus grande, la seconde la plus petite surface de révolution, puisque $y - c$, et par conséquent la dérivée seconde

$$\frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{y-c}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

reste, entre les limites de l'intégrale, constamment négative si la courbe est concave, et constamment positive si la courbe est convexe vers l'axe des x, pourvu toutefois que dans le second cas la chaînette n'atteigne pas l'axe de révolution.

Admettons maintenant que les points extrêmes ne soient pas fixes, mais qu'ils puissent se déplacer sur deux courbes données; soit $y = \mathrm{f}(x)$ l'équation de l'une ou l'autre de ces courbes, on aura pour l'extrémité située sur cette courbe

$$V - [y' - \mathrm{f}'(x)]P_1 = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + y'\mathrm{f}'(x) = 0.$$

Une équation semblable aura lieu pour la seconde extrémité, et l'on en conclura que la chaînette doit couper normalement chacune des courbes limites données.

Problème V.

107. *Parmi toutes les courbes de même longueur, trouver celle qui, par sa révolution autour d'un axe donné, engendre le plus grand ou le plus petit volume.*

Prenons l'axe de révolution pour axe des x. L'expression de l'arc étant $\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$, et celle du volume engendré par sa révolution $\pi\int y^2\,dx$, le problème revient à chercher le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$\int\left(y^2 - a\sqrt{1+y'^2}\right)dx.$$

On a

$$V = y^2 - a\sqrt{1+y'^2}, \quad P = 2y, \quad P_1 = \frac{-ay'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Puisque V ne renferme pas la variable indépendante x, on peut immédiatement abaisser d'une unité l'ordre de l'équation indéfinie $P - \frac{dP_1}{dx} = 0$, en écrivant à sa place $V - P_1 y' = c$ (n° 61). Substituant alors à V et à P_1 leurs valeurs, on trouve

$$(1) \qquad y^2 - \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

ou

$$dx = \pm \frac{(y^2-c)\,dy}{\sqrt{a^2-(y^2-c)^2}};$$

c'est l'équation différentielle de la courbe élastique. Son intégrale en x et y ne peut pas être obtenue sous forme finie; mais en différentiant l'équation (1) et désignant par ρ le rayon de courbure, on trouve

$$2y = -\frac{ay''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{a}{2y}.$$

La ligne qui parmi toutes les courbes de même longueur engendre le plus grand ou le plus petit solide de révolution, est donc caractérisée par cette propriété qu'en chaque point son rayon de courbure est en raison inverse de l'ordonnée.

Les points extrêmes de la courbe peuvent être fixes ou mobiles sur des lignes données. Dans l'un et l'autre cas, les constantes arbitraires seront déterminées d'une manière analogue à celle que l'on a suivie dans les exemples précédents.

La dérivée seconde

$$\frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{-a}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dont le signe dépend uniquement de celui de la constante

a, montre qu'il faut prendre a positif pour obtenir le maximum, négatif pour obtenir le minimum de volume.

Problème VI.

108. *Trouver une courbe telle, que la surface engendrée par sa révolution autour d'un axe donné étant constante, le volume contenu soit maximum ou minimum.*

Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, l'axe de révolution étant pris pour axe des x; il s'agit de déterminer y en fonction de x, de manière que $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ayant une valeur donnée, $\int y^2\,dx$ devienne maximum ou minimum, ce qui revient à chercher le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(y^2 - 2ay\sqrt{1+y'^2}\right)dx.$$

On a

$$V = y^2 - 2ay\sqrt{1+y'^2}, \quad P = 2\left(y - a\sqrt{1+y'^2}\right),$$

$$P_1 = -\frac{2ayy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \frac{d^2V}{dy'^2} = -\frac{2ay}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on voit déjà qu'il faut supposer la constante a positive pour obtenir le maximum, négative pour obtenir le minimum. Dans l'un ou dans l'autre cas, la fonction y doit satisfaire à l'équation différentielle du second ordre $P - \frac{dP_1}{dx} = 0$, que l'on peut remplacer immédiatement, puisque V ne renferme pas la variable indépendante x, par l'équation différentielle du premier ordre

$$V - P_1 y' = c,$$

ou

$$(1) \qquad y^2 - \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

Telle est donc l'équation différentielle de la courbe cherchée. Elle ne permet pas d'exprimer y en x au moyen des fonctions dont on se sert dans l'analyse élémentaire, mais il est facile d'en tirer une relation finie entre l'arc s et l'ordonnée. En effet, l'équation (1) étant mise sous la forme

$$(2) \qquad y^2 - 2ay\frac{dx}{ds} = c,$$

on en tire successivement

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y^2 - c}{2ay}, \quad \frac{dy}{ds} = \pm\frac{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2-c)^2}}{2ay},$$

$$ds = \pm\frac{2ay\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2-c)^2}},$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad \cos\left(\frac{s}{a} + k\right) = \frac{2a^2 + c - y^2}{2a\sqrt{a^2+c}},$$

k étant une nouvelle constante arbitraire.

La surface de révolution dont la génératrice est représentée par l'équation (1) jouit d'une propriété remarquable que nous allons indiquer. Si l'on différentie cette équation, en appelant N la partie de la normale comprise entre la courbe et l'axe des x, et ρ le rayon de courbure pris avec le signe + ou avec le signe — suivant que ce rayon fait un angle obtus ou aigu avec les y positifs, c'est-à-dire suivant que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des x, en sorte que

$$\rho = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \mathrm{N} = y\sqrt{1+y'^2},$$

on trouve sans peine

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mathrm{N}} = \frac{1}{a}.$$

Or ρ et N sont évidemment les deux rayons de courbure principaux de la surface de révolution; la dernière équation exprime donc qu'en chaque point de cette surface la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$. Nous verrons plus tard que cette propriété appartient en général à toutes les surfaces qui sous une étendue donnée renferment un volume maximum.

109. M. Delaunay a donné (*Journal de Liouville*, VI, 315) une interprétation géométrique très-élégante de l'équation (1) en montrant qu'elle appartient à une courbe décrite par l'un des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur l'axe des x.

En effet, supposons qu'une ellipse dont les demi-axes sont a et b roule sur l'axe des x. Son foyer F décrit une courbe qui, d'après une propriété générale des épicycloïdes, a pour normale la droite menée du point F au point K où l'ellipse mobile touche l'axe des x. En désignant par x, y les coordonnées du foyer F et par r le rayon vecteur FK, on a donc

$$y = \pm r \frac{dx}{ds},$$

le second membre devant être pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le point de contact K se trouve à droite ou à gauche (vers les x positives ou les x négatives) de l'ordonnée y. Désignons par y_1 l'ordonnée du second foyer F_1 et par r_1 le rayon vecteur F_1K mené de ce foyer au point de contact K; les deux rayons vecteurs r, r_1 faisant des angles égaux avec l'axe des x, tangent à l'ellipse au point K, on aura de même

$$y_1 = \pm r_1 \frac{dx}{ds}.$$

Ajoutant et remplaçant $r + r_1$ par $2a$, il vient

$$y + y_1 = \pm 2a \frac{dx}{ds}.$$

On a d'ailleurs

$$yy_1 = b^2.$$

Éliminant y_1, on trouve

$$(4) \qquad y^2 \mp 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

Telle est donc l'équation différentielle de la courbe décrite par le foyer F.

On trouverait une équation semblable pour la courbe décrite par le second foyer F_1, avec la seule différence que si l'on prend le signe supérieur pour la première courbe, on devra prendre le signe inférieur pour la seconde, et *vice versâ*. Les courbes décrites par les deux foyers ne diffèrent, en effet, que par leur position.

Il suffirait de changer b^2 en $-b^2$ et d'écrire

$$(5) \qquad y^2 \mp 2ay \frac{dx}{ds} - b^2 = 0$$

pour avoir l'équation de la courbe décrite par l'un ou par l'autre des foyers d'une hyperbole qui roule sur l'axe des x.

L'équation (1) pouvant être identifiée avec (4) ou (5) suivant que c est négatif ou positif, on arrive ainsi au théorème suivant :

La génératrice de la surface de révolution qui sous une étendue donnée renferme le plus grand ou le plus petit volume, est une courbe décrite par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur l'axe de révolution.

110. Les trois constantes arbitraires contenues dans

la solution générale du problème seront déterminées de diverses manières selon les restrictions imposées aux limites. Examinons quelques cas en particulier.

1° *Les points extrêmes sont fixes.* — Dans ce cas la variation de l'intégrale ne fournit pas d'équations aux limites, mais les constantes se déterminent par la condition même que la courbe doit passer par les deux points donnés et que la surface engendrée par sa révolution doit avoir une aire déterminée.

2° *L'une des extrémités de la courbe est fixe et l'autre variable.* — Les coordonnées de l'extrémité variable doivent (n° 56) vérifier les deux équations aux limites

$$P_1 = 0, \quad V = 0.$$

La relation générale $V - P_1 y' = c$ donne alors $c = 0$, ce qui réduit l'équation (1) à

$$y\left(y - \frac{2a}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0.$$

L'ordonnée y ne pouvant pas être constamment nulle, puisque sa valeur est donnée pour la première limite, il est permis de supprimer le facteur y. Résolvant ensuite par rapport à y' ou $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$dx = \pm \frac{y dy}{\sqrt{4a^2 - y^2}},$$

et en intégrant,

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = 4a^2,$$

équation d'un cercle de rayon $2a$, ayant son centre sur l'axe des x.

Si l'on remarque en outre que les équations $P_1 = 0$, $V = 0$ ne peuvent subsister en même temps pour l'extrémité variable qu'autant que son ordonnée y sera nulle,

on en conclura que la courbe est dans ce cas un arc de cercle qui aboutit d'un côté à l'axe de révolution, et dont le centre se trouve sur ce même axe.

3° *La courbe doit aboutir des deux côtés à une droite parallèle à l'axe de révolution.*—Les valeurs limites de y étant données et celles de x restant variables, on a pour chacune des limites la condition

$$V - P_1 y' = 0$$

qui revient à

$$c = 0.$$

On en conclura, comme dans le cas précédent, que la courbe est un arc de cercle ayant son centre sur l'axe des x.

L'arc de cercle devient une demi-circonférence lorsque la droite sur laquelle doivent se trouver les points extrêmes coïncide avec l'axe de révolution. Il en résulte que *de toutes les surfaces de révolution la sphère est celle qui sous une étendue superficielle donnée renferme le plus grand volume.*

111. Dans le premier cas, le problème présente une circonstance singulière lorsque les points donnés A et B entre lesquels il faut mener la courbe, sont situés sur l'axe même des x, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit simplement de construire sur une base donnée AB une courbe telle, que l'aire de la surface engendrée par sa révolution autour de la droite AB étant donnée, le volume contenu soit un maximum. En effet, puisque alors la valeur $y = 0$ des deux ordonnées extrêmes doit vérifier l'équation générale (1), la constante c sera nulle et cette équation deviendra celle d'un cercle ayant son centre sur l'axe des x. Le solide de révolution serait donc une sphère construite sur le diamètre AB, solution impossible, puisque cette

sphère a une surface déterminée que l'on ne peut pas faire égale à une autre aire donnée.

Ce fait analytique a paru étrange à quelques géomètres, parce que, dans leur opinion, le problème doit évidemment admettre une solution, et ils en ont proposé récemment des interprétations très-différentes. M. Jellett en conclut simplement que le calcul des variations est en défaut; M. Airy croit lire dans les formules qui renferment la solution du problème que la courbe se compose de deux parties distinctes, à savoir d'une demi-circonférence de rayon convenable pour engendrer l'aire voulue, et d'une portion de l'axe même de révolution. De leur côté, MM. Todhunter et Challis, admettant que la ligne qui doit unir les points A et B se compose d'abord de deux droites, élevées perpendiculairement à l'axe aux points A et B, puis d'une courbe joignant les extrémités de ces droites, arrivent également à donner une courbe discontinue comme solution du problème en question.

Aucune de ces interprétations ne nous paraît complétement satisfaisante. L'impossibilité où l'on est de vérifier toutes les conditions du problème indique nécessairement qu'il n'a pas de solution, et, si l'on se place au point de vue analytique, il n'est nullement étonnant qu'il en soit ainsi. En effet, la courbe en question doit être choisie parmi toutes celles qui font prendre à l'intégrale $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ une valeur déterminée; or rien n'empêche que la courbe soit située en partie au-dessus, en partie au-dessous de l'axe des x, et, par conséquent, que les éléments de l'intégrale $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ soient les uns positifs, les autres négatifs; l'intégrale elle-même sera alors l'excès de la somme des éléments positifs sur celle des éléments négatifs, et chacune de ces sommes pourra croître sans cesse pourvu que leur différence reste constante. Donc aussi, l'intégrale $\int y^2\,dx$ dont on cherche

le maximum et qui n'a que des éléments positifs, pourra croître indéfiniment sans que l'intégrale $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ change de valeur. De plus, les points A, B étant pris sur l'axe même des x, il est toujours possible de substituer à une courbe quelconque menée entre A et B une autre courbe infiniment voisine tracée entre les mêmes points, et qui donne pour $\int y^2\,dx$ une valeur plus grande, tout en donnant pour $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ la même valeur que la première courbe. Il en résulte que l'intégrale $\int y^2\,dx$ n'a pas de maximum, si l'on n'écarte pas avant tout les valeurs négatives de l'ordonnée y compatibles avec la condition imposée à la seconde intégrale $\int y\sqrt{1+y'^2}\,dx$; or cette absence du maximum devait nécessairement se manifester par une solution impossible.

Il est vrai que si l'on ne considère que des courbes situées tout entières d'un côté de l'axe, la génératrice du solide qui, sous une étendue superficielle donnée, renferme le plus grand volume, sera une ligne composée d'une portion de l'axe et d'une demi-circonférence, comme M. Airy l'a suggéré; mais ce résultat, facile à vérifier par d'autres considérations, n'est pas proprement une solution du problème analytique dont il a été question.

Problème VII.

112. *Trouver la brachistochrone ou la courbe de plus vite descente entre deux points.*

Considérons un point matériel soumis à l'action de la pesanteur et assujetti à se mouvoir le long d'une courbe quelconque. Prenons pour axe des y la direction de la pesanteur, et soient x, y les coordonnées du point mobile, s l'arc de courbe qu'il décrit, v sa vitesse, t le temps, g la mesure de la pesanteur ou la vitesse acquise pendant

l'unité de temps dans la chute libre, on aura

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{ds} = \frac{g}{v}\frac{dy}{dt},$$

et, par conséquent,

$$vdv = gdy.$$

En intégrant, et désignant par x_1, y_1 les coordonnées du point de départ, par x_2, y_2 celles du point d'arrivée du mobile, on obtient

$$v^2 = 2g(y - y_1 + k),$$

k étant la hauteur de chute qui correspond à la vitesse initiale. On a d'ailleurs

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad t = \int \frac{ds}{v};$$

substituant à v sa valeur, pour obtenir l'expression du temps employé par le mobile à parcourir sa trajectoire entière depuis le point x_1, y_1 jusqu'au point x_2, y_2, on voit que c'est l'intégrale

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y - y_1 + k}}\, dx,$$

qu'il s'agit de rendre minimum.

Comme cette intégrale renferme la valeur limite y_1 de la fonction y, on aura à suivre la marche indiquée n° 63. Appelons, comme à l'ordinaire, V la fonction multipliée par dx sous le signe intégral, et P, P_1 ses dérivées partielles prises par rapport à y et y', la variation de l'intégrale sera

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(P - \frac{dP_1}{dx}\right) \delta y \,.\, dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1}\, dx$$
$$+ \Big|_{x_1}^{x_2} (V\delta x + P_1 \delta y);$$

ou, si l'on se rappelle que (n° 30)

$$\delta y_1 = \int^{x_1} (\delta y + y' \delta x_1), \quad \delta y_2 = \int^{x_2} (\delta y + y' \delta x_2),$$

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left(P - \frac{dP_1}{dx} \right) \delta y \, . dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} dx \\ + \int^{x_2} \{ (V - P_1 y') \delta x_2 + P_1 \delta y_2 \} \\ - \int^{x_1} \{ (V - P_1 y') \delta x_1 + P_1 \delta y_1 \}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$V = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y - y_1 + k}}, \quad P = - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2(y - y_1 + k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$P_1 = \frac{y'}{\sqrt{(y - y_1 + k)(1 + y'^2)}}, \quad \frac{dV}{dy_1} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2(y - y_1 + k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dP_1}{dx} = \frac{2(y - y_1 + k) y'' - y'^2 (1 + y'^2)}{2(y - y_1 + k)^{\frac{3}{2}} (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cela posé, en égalant à zéro la variation de l'intégrale, on trouve d'abord l'équation indéfinie

$$1 + y'^2 + 2(y - y_1 + k) y'' = 0,$$

qui, mise sous la forme

$$\frac{2 y' dy'}{1 + y'^2} + \frac{dy}{y - y_1 + k} = 0,$$

s'intègre immédiatement et donne

$$(y - y_1 + k)(1 + y'^2) = 2a,$$

a étant une constante arbitraire. Résolvant par rapport à

y' ou $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$dx = dy\sqrt{\frac{y - y_1 + k}{2a - (y - y_1 + k)}}.$$

Si l'on fait

$$y - y_1 + k = a(1 - \cos\omega),$$

ce qui est toujours permis, puisque la quantité $y - y_1 + k$ doit être comprise entre o et $2a$, sans quoi le radical deviendrait imaginaire, il viendra

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega,$$

et, en intégrant,

$$x - x_1 + h = a(\omega - \sin\omega),$$

h étant une nouvelle constante arbitraire.

Les deux équations simultanées

$$(1)\qquad \begin{cases} x - x_1 + h = a(\omega - \sin\omega) \\ y - y_1 + k = a(1 - \cos\omega) \end{cases}$$

appartiennent évidemment à une cycloïde qui est par conséquent la courbe cherchée. Il serait facile d'éliminer la variable auxiliaire ω et d'exprimer y en x; mais nous préférons la forme (1), parce qu'elle se prête plus facilement à la discussion ultérieure.

113. On tire successivement des équations (1)

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega, \quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

$$y' = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \cot\frac{\omega}{2}, \quad 1 + y'^2 = \operatorname{coséc}^2\frac{\omega}{2},$$

$$V = \frac{\operatorname{coséc}^2\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2a}}, \quad P_1 = \frac{\cot\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2a}}, \quad V - P_1 y' = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1}\,dx = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2a}\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\cot\frac{\omega_1}{2} - \cot\frac{\omega_2}{2}}{\sqrt{2a}},$$

ω_1 et ω_2 étant les valeurs de ω aux deux points extrêmes de la courbe. Par suite de ces relations, les termes aux limites de la variation δS se simplifient considérablement et deviennent

$$(2) \qquad \frac{\delta x_2 + \cot\frac{\omega_2}{2}\,\delta y_2}{\sqrt{2a}} - \frac{\delta x_1 + \cot\frac{\omega_2}{2}\,\delta y_1}{\sqrt{2a}}.$$

Ils disparaissent d'eux-mêmes lorsque les points extrêmes de la courbe sont donnés, puisque alors les variations δx_1, δx_2, δy_1, δy_2 sont nulles; mais il reste, pour déterminer les constantes a, h, la condition que la cycloïde doit passer par ces deux points extrêmes. Quant à la constante k, nous avons déjà fait remarquer qu'elle dépend de la vitesse initiale que nous supposons donnée.

Mais si les extrémités de la trajectoire sont seulement assujetties à se trouver sur deux courbes, déterminées par les équations

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \psi(x_2),$$

on aura

$$\delta y_1 = \varphi'(x_1)\,\delta x_1, \quad \delta y_2 = \psi'(x_2)\,\delta x_2,$$

et les termes (2) égalés à zéro fourniront les deux équations aux limites

$$(3) \qquad \begin{cases} 1 + \varphi'(x_1)\cot\frac{\omega_2}{2} = 0, \\ 1 + \psi'(x_2)\cot\frac{\omega_2}{2} = 0, \end{cases}$$

qui serviront à déterminer les deux constantes a et h. En éliminant $\cot\frac{\omega_2}{2}$, on trouve la relation simple

$$\varphi'(x_1) = \psi'(x_2),$$

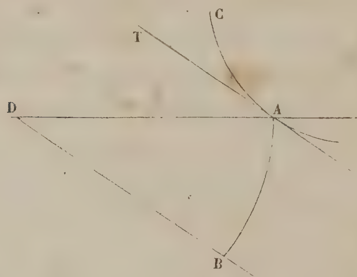
exprimant qu'aux entrémités de la trajectoire les deux courbes limites ont leurs tangentes parallèles. Comme on a d'ailleurs en général

$$y' = \cot\frac{\omega}{2},$$

la seconde équation (3) prouve, en outre, que la cycloïde est normale à la seconde courbe limite au point d'arrivée du mobile.

Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver la ligne de plus vite descente entre une courbe AC et une droite BD (*fig.* 4) situées dans un même plan vertical, et ad-

Fig. 4.



mettons, pour simplifier, que la vitesse initiale soit nulle. On prendra pour point de départ le point A où la tangente AT à la courbe est parallèle à la droite BD, et l'on mènera par ce point une droite horizontale AD, sur laquelle on fera rouler un cercle de rayon convenable pour que la cycloïde ainsi engendrée, ayant son sommet en A, coupe la droite BD sous un angle droit. L'arc AB de cette cycloïde sera la courbe cherchée.

114. Passons maintenant à la variation seconde, et examinons si toutes les conditions de minimum se trouvent réellement remplies. La relation générale entre x et y

qu'on obtiendrait en éliminant ω entre les équations (1), renfermant deux constantes arbitraires a et h, il faut s'assurer d'abord si le rapport des dérivées partielles $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{dh}$ ne passe pas deux fois par une même valeur entre les limites de l'intégrale S, ou lorsque x croît de x_1 à x_2. Or, si l'on différentie les équations (1), en y regardant x comme constante et y, ω, a, h comme variables, on aura

$$\begin{aligned} dh &= (\omega - \sin\omega)\,da + a\,(1 - \cos\omega)\,d\omega, \\ dy &= (1 - \cos\omega)\,da + a\sin\omega\,d\omega, \end{aligned}$$

et, en éliminant $d\omega$,

$$(1 - \cos\omega)\,dy = (2 - 2\cos\omega - \omega\sin\omega)\,da + \sin\omega\,dh$$

ou

$$\sin\frac{\omega}{2}\,dy = 2\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right)da + \cos\frac{\omega}{2}\,dh.$$

Faisant tour à tour $dh = 0$, $da = 0$, on en tire

$$\frac{dy}{da} = 2\left(1 - \frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{2}\right), \quad \frac{dy}{dh} = \cot\frac{\omega}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{da} : \frac{dy}{dh} = \frac{2\left(1 - \frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{2}\right)}{\cot\frac{\omega}{2}} = 2\left(\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\right),$$

expression qui croît continuellement de 0 à $+\infty$ et de $-\infty$ jusqu'à $-\pi$, lorsque $\frac{\omega}{2}$ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$ à π. Le rapport $\frac{dy}{dx} : \frac{dy}{dh}$ ne prendra donc pas deux fois une même valeur pendant que $\frac{\omega}{2}$ reste compris entre 0 et π,

ou ω entre 0 et 2π, c'est-à-dire tant que le point de départ et le point d'arrivée du mobile se trouvent sur une même branche de cycloïde.

En outre de cette première condition remplie, la dérivée seconde

$$\frac{d^2V}{dy'^2} = \frac{y - y_1 + k}{[(y - y_1 + k)(1 + y'^2)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sqrt{2a}}$$

est essentiellement positive, et ne devient jamais infinie; la solution (1) donne donc un véritable minimum.



DIXIÈME LEÇON.

Suite de la recherche des courbes planes. — La courbe rapportée à des coordonnées polaires. — Cas où l'on prend l'arc pour variable indépendante. — Solide de révolution qui exerce la plus grande attraction sur un point donné et dans une direction déterminée. — Courbe qui renferme avec sa développée et ses deux rayons de courbure extrêmes l'aire minima. — Courbe qui a le plus grand ou le plus petit moment d'inertie par rapport à un point donné. — Équilibre d'un fil flexible et inextensible.

---

115. Dans les problèmes résolus jusqu'ici, nous avons rapporté l'équation de la courbe cherchée à un système de coordonnées rectangulaires x, y, en regardant y comme une fonction inconnue de x. Rien cependant n'empêche de choisir autrement les coordonnées, et il est quelquefois plus commode de remplacer x, y par des coordonnées polaires r, θ; r désignant le rayon vecteur d'un point de la courbe ou sa distance à l'origine, et θ l'angle que ce rayon fait avec un axe fixe. Il s'agit alors de déterminer r en fonction de θ, de manière à rendre maximum ou minimum une certaine intégrale $\int V\, d\theta$, dans laquelle V peut contenir θ, r, $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2 r}{d\theta^2}, \ldots$, et pour résoudre le problème sous cette nouvelle forme, il suffira de remplacer, dans les formules déjà données (n° 56), x, y, y', y'', ... par θ, r, r', r'', ...; r', r'', ..., étant les dérivées de r relatives à θ.

Prenons pour exemple la question suivante, qui est un cas particulier du problème II.

Quelle est la courbe qui sous un périmètre donné circonscrit une aire maxima ?

On peut rapporter la courbe cherchée à un système de coordonnées polaires r, θ. La longueur de la courbe et l'aire circonscrite sont alors exprimées par

$$\int \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta, \quad \frac{1}{2}\int r^2 d\theta,$$

et la question revient à chercher le maximum de l'intégrale

$$\int \left(r^2 - 2a\sqrt{r^2 + r'^2}\right) d\theta.$$

Si l'on appelle, comme auparavant, V la fonction sous le signe intégral, et P, P_1 ses dérivées partielles relatives à r, r', en sorte que

$$V = r^2 - 2a\sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$P = 2r - \frac{2ar}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad P_1 = -\frac{2ar'}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

l'équation générale de la courbe sera

$$P - \frac{dP_1}{d\theta} = 0,$$

et, puisque V ne renferme pas la variable indépendante θ, elle s'intégrera immédiatement une fois en donnant

$$V - P_1 r' = c, \quad \text{ou} \quad r^2 - \frac{2ar^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = c.$$

L'origine des coordonnées étant arbitraire, on peut la placer en un point même de la courbe. On aura alors pour ce point $r = 0$, et par suite $c = 0$, ce qui réduit à

$$\frac{2a}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 1$$

l'équation de la courbe en question. On en tire

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{4a^2 - r^2}, \quad d\theta = \pm\frac{dr}{\sqrt{4a^2 - r^2}},$$

et, en intégrant,

$$r = 2a \sin(\theta + k).$$

Pour simplifier davantage, on peut prendre pour axe des coordonnées la tangente à la courbe. On aura alors, pour $\theta = 0$,

$$\frac{r}{r'} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} k = 0,$$

ce qui donne

$$k = 0 \quad \text{et} \quad r = 2a \sin\theta,$$

équation d'un cercle de rayon a. C'est donc au cercle qu'appartient la propriété de contenir la plus grande surface sous un périmètre donné. En vertu du choix d'origine et d'axe que nous avons fait, les valeurs extrêmes de θ sont 0 et π, celles de r sont 0; ces valeurs étant données, il n'y a plus d'autres conditions aux limites à remplir.

116. Au lieu de x ou de θ on peut prendre pour variable indépendante une autre variable quelconque, par exemple l'arc s de la courbe, qui dans beaucoup de cas se présente tout naturellement pour jouer ce rôle; mais dans chaque choix particulier il faudra user de certaines précautions pour que le changement de la variable indépendante n'altère pas les conditions essentielles du problème.

Considérons, par exemple, le problème déjà résolu (Probl. III) où l'on cherche la courbe qui, par sa révolution autour d'un axe donné, engendre la plus petite surface. Si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, la surface de révolution s'exprime simplement par $2\pi \int y\,ds$; et il semble au premier abord que la question se ramène à déterminer y en fonction de s, de manière que l'intégrale $\int y\,ds$ devienne minimum; cependant, quelles

que soient les restrictions auxquelles on assujettisse les limites de l'intégrale, ainsi formulé analytiquement le problème est impossible à résoudre, parce qu'il conduirait, pour première équation de condition, à l'équation absurde $1=0$; tandis qu'en prenant x pour variable indépendante, nous avons obtenu une solution réelle, à savoir une chaînette ayant pour directrice l'axe des x.

Cette discordance apparente s'évanouit devant une analyse plus approfondie. Il est vrai que dans l'équation d'une courbe quelconque on peut toujours regarder l'ordonnée y comme une fonction de l'arc s, mais le contraire n'a pas lieu, c'est-à-dire qu'une relation analytique donnée entre y et s ne peut pas toujours représenter une courbe. En effet, l'accroissement positif ou négatif Δy de l'ordonnée ne pouvant jamais être plus grand que l'accroissement Δs de l'arc, la dérivée $\frac{dy}{ds}$, dans l'équation d'une courbe quelconque, ne peut avoir une valeur positive ou négative plus grande que l'unité, ou ne peut varier qu'entre les limites $+1$ et -1. Il en résulte que l'équation

$$y=a+bs, \quad \text{dans laquelle} \quad b>1,$$

et une infinité d'autres relations entre y et s, sont géométriquement impossibles. Cette remarque très-simple réduit notablement le nombre des formes que pourra prendre l'ordonnée exprimée en fonction de s. Si l'on n'en tient pas compte, si l'on admet indistinctement toutes les relations analytiques entre y et s, sans écarter celles qui n'ont pas de signification géométrique, il pourra donc arriver qu'une intégrale n'ait plus de maximum ou de minimum, quoique la grandeur géométrique qu'elle représente doive en avoir; et c'est en effet ce qui rend chimérique la recherche du minimum de l'intégrale $\int y ds$.

117. La conséquence de ce qui précède est que dans tous les cas où l'on cherche une relation entre l'arc s et l'une des coordonnées x, y, que l'on prenne l'arc s pour variable indépendante ou pour fonction à déterminer, il faudra, pour rétablir l'équivalence entre la question analytique et le problème géométrique dont elle est la traduction, introduire la restriction nouvelle que la dérivée $\frac{dx}{ds}$ ou $\frac{dy}{ds}$ doit être comprise entre $+1$ et -1. On l'introduira très-simplement en regardant x, y comme des fonctions de s assujetties à vérifier l'équation

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1,$$

et il ne restera plus qu'à chercher les formes de ces fonctions qui conviennent à la question proposée. Dans ces conditions, le problème de la surface de révolution minima se présente sous ce nouvel énoncé analytique :

x et y étant deux fonctions de s assujetties à vérifier l'équation

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} - 1 = 0,$$

déterminer les formes de ces fonctions de telle sorte que l'intégrale $\int y\,ds$ soit un minimum; et il se ramène, par conséquent, à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int \left[y + \lambda \left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} - 1 \right) \right] ds,$$

λ étant une fonction de s inconnue mais invariable de forme, dont on disposera pour satisfaire à la condition

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} - 1 = 0.$$

Résolu sous cette forme, le problème nous ramènerait à la chaînette, comme dans le cas où x était la variable indépendante.

118. Ces considérations sont tellement importantes, leur application se présente si fréquemment, qu'on nous saura gré d'exposer plus en détail la marche à suivre lorsqu'on veut déterminer une courbe plane jouissant de quelque propriété de maximum ou de minimum, en prenant l'arc s pour variable indépendante. Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, $x', x'', \ldots y', y'' \ldots$ les dérivées successives de x et de y prises par rapport à s, et supposons qu'il s'agisse de déterminer x et y en fonctions de s, de manière à rendre maximum ou minimum l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} F(s, x, x', x'', y, y', y'')\, ds\ (*).$$

Les fonctions inconnues x, y étant liées entre elles par la relation $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$, il faudra à $F(s, x, x', x'', y, y', y'')$ ajouter le terme $\lambda(x'^2 + y'^2 - 1)$, λ étant une fonction indéterminée de s, de sorte que le problème reviendra à chercher le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$S = \int_{s_1}^{s_2} V\, ds,$$

dans laquelle

$$V = F(s, x, x', x'', y, y', y'') + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1).$$

(*) Comme le point à partir duquel l'arc est compté est complétement arbitraire, on pourrait, sans diminuer la généralité des formules, faire $s_1 = 0$, $s_2 = s$, s étant la longueur entière de la courbe ; mais nous conserverons aux limites s_1, s_2 leur notation ordinaire, pour que les formules perdent moins de leur symétrie.

Désignons respectivement par P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 les dérivées partielles de V prises par rapport à x, x', x'', y, y', y''; la variation de l'intégrale sera

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left(P - \frac{dP_1}{ds} + \frac{d^2 P_2}{ds^2}\right) \delta x + \left(Q - \frac{dQ_1}{ds} + \frac{d^2 Q_2}{ds^2}\right) \delta y \right\} dx$$
$$+ \Big|_{s_1}^{s_2} \left\{ V \delta s + \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right) \delta x + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right) \delta y + P_2 \frac{d\delta x}{ds} + Q_2 \frac{d\delta y}{ds} \right\},$$

pourvu qu'on comprenne sous le symbole δs, tantôt la variation de s_1, tantôt celle de s_2, suivant la substitution qui l'affecte (n° 25). Égalée à zéro, cette variation donne d'abord les deux équations indéfinies

$$(1) \quad \begin{cases} P - \dfrac{dP_1}{ds} + \dfrac{d^2 P_2}{ds^2} = 0, \\ Q - \dfrac{dQ_1}{ds} + \dfrac{d^2 Q_2}{ds^2} = 0, \end{cases}$$

lesquelles jointes à la condition

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

serviront à déterminer les fonctions x, y, λ.

Lorsque la fonction F ne renferme pas l'arc s, les équations (1) admettent toujours une intégrale première facile à obtenir. En effet, dans la dérivée totale de V

$$\frac{dV}{ds} = P x' + P_1 x'' + P_2 x''' + Q y' + Q_1 y'' + Q_2 y''' + \frac{dV}{d\lambda}\lambda',$$

le dernier terme disparaît, puisque λ n'entre dans V que

sous forme linéaire et qu'on a

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda} = x'^2 + y'^2 - 1 = 0.$$

Substituant à P, Q leurs valeurs tirées des équations (1), on aura donc

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds} = (\mathrm{P}_1 x'' + \mathrm{P}'_1 x') + (\mathrm{P}_2 x''' - \mathrm{P}''_2 x') + (\mathrm{Q}_1 y'' + \mathrm{Q}'_1 y') + (\mathrm{Q}_2 y''' - \mathrm{Q}''_2 y'),$$

expression qui se compose de quatre dérivées exactes et qui donne par l'intégration

$$(2) \quad \mathrm{V} = k + \mathrm{P}_1 x' + \mathrm{Q}_1 y' + \mathrm{P}_2 x'' - \frac{d\mathrm{P}_2}{ds} x' + \mathrm{Q}_2 y'' - \frac{d\mathrm{Q}_2}{ds} y',$$

k étant une constante arbitraire.

119. Pour tirer plus facilement parti des termes aux limites de $\delta\mathrm{S}$, nous y remplacerons d'abord les valeurs limites des variations δx, δy, $\frac{d\delta x}{ds}$, $\frac{d\delta y}{ds}$, par les variations des valeurs limites de x, y, x', y'. Désignons par ξ, ξ', η, η' les valeurs de x, x', y, y' correspondantes à l'une ou à l'autre des extrémités de la courbe, en sorte que l'on ait

$$\xi = \Big| x, \quad \xi' = \Big| x', \quad \eta = \Big| y, \quad \eta' = \Big| y',$$

le signe de substitution devant porter tantôt l'indice s_1, tantôt l'indice s_2, nous aurons, en prenant la variation des deux membres (n° 30),

$$\delta\xi = \Big| (\delta x + x'\delta s), \quad \delta\xi' = \Big| \left(\frac{d\delta x}{ds} + x''\delta s\right),$$

$$\delta\eta = \Big| (\delta y + y'\delta s), \quad \delta\eta' = \Big| \left(\frac{d\delta x}{ds} + y''\delta s\right).$$

Il en résulte qu'on peut, sous le signe de substitution, dans les termes aux limites de δS, remplacer δx, δy, $\frac{d\delta x}{ds}$, $\frac{d\delta y}{ds}$ par les valeurs suivantes :

$$\delta x = \delta\xi - x'\delta s, \quad \frac{d\delta x}{ds} = \delta\xi' - x''\delta s,$$

$$\delta y = \delta\eta - y'\delta s, \quad \frac{d\delta y}{ds} = \delta\eta' - y''\delta s;$$

ces termes deviennent alors

$$\int_{s_1}^{s_2}\left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta + P_2\delta\xi' + Q_2\delta\eta'\right\}$$

$$+\int_{s_1}^{s_2}\left\{V - \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)x' - \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)y' - P_2x'' - Q_2y''\right\}\delta s.$$

Or, en vertu de l'équation (2), le coefficient de δs n'est autre chose que la constante k; on a de plus

$$\int_{s_1}^{s_2} k\delta s = k(\delta s_2 - \delta s_1) = k\delta(s_2 - s_1),$$

$s_2 - s_1$ étant précisément la longueur entière de la courbe. Donc les termes aux limites de δS prennent la forme définitive

$$k\delta(s_2 - s_1) + \int_{s_1}^{s_2}\left\{\left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta + P_2\delta\xi' + Q_2\delta\eta'\right\}.$$

Nous pouvons dès à présent et avant tout faire une remarque importante. Lorsque la longueur $s_2 - s_1$ de la courbe est déterminée, le terme $k\delta(s_2 - s_1)$ disparaît avec la variation $\delta(s_2 - s_1)$ qui est nulle; mais chaque fois que la courbe est variable de longueur, ce terme égalé à zéro fournit la condition

$$k = 0,$$

qui réduit l'équation (2) à

$$V - \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)x' - \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)y' - P_2 x'' - Q_2 y'' = 0.$$

120. Voyons quelles sont, pour quelques restrictions particulières, les équations aux limites que la courbe doit vérifier.

1° *La courbe doit être menée entre deux points fixes.* — Les valeurs limites ξ, η de x, y étant données, on a $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$. Il est vrai que la relation générale $x'^2 + y'^2 = 1$ entraîne pour les valeurs limites de x', y' une relation pareille, ou $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$, d'où il semble résulter que les variations $\delta\xi'$, $\delta\eta'$ sont liées entre elles par la condition

$$\xi'\delta\xi' + \eta'\delta\eta' = 0;$$

mais comme on a déjà tenu compte de cette dépendance générale entre x' et y' au moyen du facteur indéterminé λ, on n'a plus à s'en occuper, et il est permis de regarder dès à présent $\delta\xi'$, $\delta\eta'$ comme arbitraires et indépendants l'un de l'autre. Les termes en $\delta\xi'$, $\delta\eta'$ de la variation de l'intégrale fourniront par conséquent pour chacune des limites les deux conditions

$$(3) \qquad P_2 = 0, \quad Q_2 = 0.$$

2° *La direction de la tangente à la courbe en chacun des deux points extrêmes est donnée, ces points restant eux-mêmes indéterminés.* — On a $\delta\xi' = 0$, $\delta\eta' = 0$, tandis que $\delta\xi$ et $\delta\eta$ sont arbitraires. Les équations à vérifier pour chacune des limites seront par conséquent

$$(4) \qquad P_1 - \frac{dP_2}{ds} = 0, \quad Q_1 - \frac{dQ_2}{ds} = 0.$$

3° *La ligne cherchée doit aboutir à deux courbes fixes.* — Soit $f(x, y) = 0$, l'équation de l'une de ces courbes limites, les coordonnées ξ, η de l'extrémité correspondante de la ligne cherchée seront assujetties à la restriction

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

qui établit entre leurs variations une dépendance mutuelle exprimée par

$$\frac{df}{d\xi}\delta\xi + \frac{df}{d\eta}\delta\eta = 0.$$

Les termes aux limites en $\delta\xi$ et $\delta\eta$ donnent d'ailleurs pour l'extrémité que l'on considère

$$\left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta = 0,$$

ou, en éliminant $\delta\xi$ ou $\delta\eta$,

(5) $$\frac{P_1 - \frac{dP_2}{ds}}{\frac{df}{d\xi}} = \frac{Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}}{\frac{df}{d\eta}}.$$

Dans le cas particulier où la courbe limite serait une droite, les dérivées $\frac{df}{d\xi}$, $\frac{df}{d\eta}$ seraient constantes; de plus, si cette droite était parallèle à l'axe des x, $\frac{df}{d\xi}$ serait nulle, et l'équation (5) deviendrait

$$P_1 - \frac{dP_2}{ds} = 0;$$

elle se réduirait, au contraire, à

$$Q_1 - \frac{dQ_2}{ds} = 0,$$

si la droite était perpendiculaire à l'axe des x.

On aura en outre, pour la limite dont il s'agit,

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0,$$

chaque fois que l'on n'aura pas fixé la direction que la tangente à la courbe cherchée doit avoir au point extrême.

Problème VIII.

121. *Trouver la forme que doit prendre un corps homogène de volume donné, pour que l'attraction qu'il exerce sur un point matériel* A, *dans une direction donnée* AX, *soit la plus grande possible.*

Nous admettons comme évident : 1° que le point matériel A ne peut pas être séparé du corps, ou qu'il doit être pris soit à la surface du corps, soit dans son intérieur; 2° que le corps doit être un solide de révolution dont l'axe coïncide avec la direction AX; et nous nous proposons de trouver la génératrice de ce solide.

Prenons le point A pour origine et la direction AX pour axe d'un système de coordonnées polaires. Soit dv un élément du volume, u sa distance à l'origine, θ l'angle que cette distance fait avec l'axe, φ l'angle dièdre compris entre le plan méridien de l'élément dv et un plan méridien fixe. En supposant l'attraction proportionnelle à la puissance $n^{ième}$ de la distance, on pourra représenter par $\mu u^n dv$ la force avec laquelle le point A est attiré par dv, et par

$$df = \mu u^n \cos\theta \, dv$$

la projection de cette force sur l'axe AX. On a d'ailleurs

$$dv = u^2 \sin\theta \, du \, d\theta \, d\varphi,$$

et par suite

$$df = \mu u^{n+2} \sin\theta \cos\theta \, du \, d\theta \, d\varphi.$$

En intégrant, 1° par rapport à φ entre 0 et 2π, 2° par

rapport à u entre o et r, r étant le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface ou de la génératrice du solide, 3° par rapport à θ entre o et π, on trouve pour l'attraction exercée par le corps entier sur le point A,

$$f = 2\pi\mu \int_0^{\pi} \frac{r^{n+3}}{n+3} \sin\theta \cos\theta \, d\theta,$$

et pour le volume entier du corps,

$$v = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \sin\theta \, d\theta.$$

Cela posé, il s'agit de déterminer r en fonction de θ, de manière que, v demeurant constant, f soit un maximum, ce qui revient à chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{r^{n+3}}{n+3} \cos\theta - c\,\frac{r^3}{3} \right) \sin\theta \, d\theta,$$

c étant une constante dont on disposera pour donner à v la valeur voulue.

Ce problème se résout immédiatement, et l'équation de la génératrice en coordonnées polaires est

$$r^{n+2} \cos\theta - cr^2 = 0,$$

ou

(1) $$r^n \cos\theta = c.$$

Pour $n = -1$ cette équation représente un cercle dont le centre est sur AX et dont la circonférence passe par A.

Pour $n = -2$, ce qui est le cas de l'attraction universelle, l'équation (1) prend la forme

(2) $$r^2 = a^2 \cos\theta.$$

Telle est donc l'équation de la génératrice du solide cherché, lorsque l'attraction est supposée agir en raison inverse du carré de la distance. Le point attiré A est situé sur la génératrice, ou sur la surface du solide, puisqu'à $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ correspond $r = 0$. Il résulte d'ailleurs de la forme de l'équation (2) que θ ne peut pas avoir une valeur positive ou négative plus grande que $\pm \frac{\pi}{2}$, et que la courbe se trouve par conséquent tout entière d'un côté de la droite AY menée par le point A perpendiculairement à l'axe AX.

122. Pour comparer la force avec laquelle le solide ainsi déterminé attire le point A à l'attraction exercée par une sphère homogène de même masse sur un point placé à sa surface, il suffit de calculer, par les formules déjà obtenues, le volume v et la force f pour le solide et pour la sphère. Jointes à l'équation (2), ces formules donnent pour le solide en question

$$v = \frac{4\pi a^3}{15}, \quad f = \frac{4\pi a \mu}{5}.$$

L'équation en coordonnées polaires d'une sphère de rayon a_0, rapportée à un point de la surface comme origine, étant

$$r = 2 a_0 \cos \theta,$$

on trouve de même pour son volume v_0 et pour l'attraction f_0 qu'elle exerce

$$v_0 = \frac{4\pi a_0^3}{3}, \quad f_0 = \frac{4\pi a_0 \mu}{3}.$$

Les deux corps devant avoir le même volume, on a

$\nu = \nu_0$, et par suite

$$a = a_0 \sqrt[3]{5}, \quad f = \frac{4\pi a_0 \mu}{\sqrt[3]{25}},$$

d'où il résulte

$$\frac{f}{f_0} = \frac{3}{\sqrt[3]{25}} = 1,026\ldots.$$

L'attraction exercée par une masse homogène sphérique sur un point de sa surface est donc à la plus grande attraction que cette même masse, convenablement moulée et orientée, pourrait exercer sur le même point, comme $\sqrt[3]{25}$ est à 3, ou à peu près comme 38 à 39. Ce résultat a été indiqué d'abord par Gauss.

Problème IX.

123. *Trouver une courbe telle, que l'aire comprise entre la courbe elle-même, sa développée et ses deux rayons de courbure extrêmes soit un minimum.*

Soient s l'arc et ρ le rayon de courbure; l'aire comprise entre la courbe, sa développée et deux rayons de courbure s'exprimera par $\frac{1}{2}\int \rho\, ds$. Prenons l'arc s pour variable indépendante, les coordonnées x, y pour des fonctions à déterminer, et désignons par x', x'', ..., y', y'', ..., leurs dérivées successives relatives à s, ces fonctions seront liées entre elles par la condition

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

et le problème se réduira à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} [\rho + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1)]\, ds,$$

λ étant une fonction de s, inconnue, mais invariable de

forme. On peut regarder ρ comme une fonction explicite de x'', y'', puisqu'on a

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2}},$$

ce qui donne

$$\frac{d\rho}{dx''} = -\rho^3 x'', \quad \frac{d\rho}{dy''} = -\rho^3 y''.$$

Cela posé, en conservant les notations du n° 118, on trouve

$$V = \rho + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) = \rho, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

$$P_1 = 2\lambda x', \quad P_2 = \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx''} = -\rho^3 x'',$$

$$Q_1 = 2\lambda y', \quad Q_2 = \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dy''} = -\rho^3 y''.$$

Puisque P et Q sont nuls, les équations indéfinies deviennent

$$P_1 - \frac{dP_2}{ds} = a, \quad Q_1 - \frac{dQ_2}{ds} = b,$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} 2\lambda x' + \rho^3 x''' + 3\rho^2 \dfrac{d\rho}{ds} x'' = a, \\ 2\lambda y' + \rho^3 y''' + 3\rho^2 \dfrac{d\rho}{ds} y'' = b, \end{cases}$$

a et b étant deux constantes arbitraires. Ces équations jointes à

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

doivent servir à déterminer x, y, λ.

Rappelons-nous d'abord les relations générales faciles

à déduire

$$x'x'' + y'y'' = 0,$$

$$x'x''' + y'y''' = -(x''^2 + y''^2) = -\frac{1}{\rho^2},$$

$$x''x''' + y''y''' = -\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds};$$

remarquons aussi que les équations

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad x'x'' + y'y'' = 0$$

donnent

$$x'y'' - y'x'' = \frac{-x''}{y'} = \frac{y''}{x'} = \pm\frac{1}{\rho},$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que le rayon ρ du cercle osculateur fait un angle aigu ou obtus avec les y positifs.

Cela posé, en éliminant λ entre les équations (1), on trouve

$$\rho^3(y'x''' - x'y''') + 3\rho^2\frac{d\rho}{ds}(y'x'' - x'y'') = ay' - bx',$$

équation qui s'intègre sur-le-champ, et donne

$$\rho^3(y'x'' - x'y'') = ay - bx + c,$$

ou bien

(2) $$\rho^2 = ay - bx + c,$$

en supposant que la courbe tourne sa concavité en bas, ou vers les y négatifs.

Les mêmes équations (1), multipliées respectivement par x'', y'', et ajoutées, donnent d'ailleurs

$$\rho^3(x''x''' + y''y''') + 3\rho^2\frac{d\rho}{ds}(x''^2 + y''^2) = ax'' + by'',$$

ou

$$2\frac{d\rho}{ds} = ax'' + by'',$$

et en intégrant,

$$(3) \qquad 2\rho - ax' - by' = k.$$

k étant une nouvelle constante arbitraire.

124. Chacune des équations (2) et (3) peut représenter la courbe cherchée. Pour déterminer les constantes qu'elles renferment, il faut faire intervenir les termes aux limites de la variation de l'intégrale. Si l'on appelle indistinctement ξ, η, ξ', η' les valeurs de x, y, x', y' correspondantes à l'une ou l'autre des extrémités de la courbe, ces termes peuvent s'écrire

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ V - \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)x' - \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)y' - P_2 x'' - Q_2 y'' \right\} \delta s$$

$$+ \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta + P_2\delta\xi' + Q_2\delta\eta' \right\},$$

ou, en ayant égard aux équations (1), (3),

$$k\delta(s_2 - s_1) + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ a\delta\xi + b\delta\eta - \rho^3(x''\delta\xi' + y''\delta\eta') \right\}.$$

Comme la longueur $s_2 - s_1$ de la courbe n'a pas été fixée à priori, la variation $\delta(s_2 - s_1)$ reste arbitraire, et son coefficient k doit être nul, ce qui réduit l'équation (3) à

$$(4) \qquad 2\rho = ax' + by'.$$

Telle est donc l'équation générale de la courbe. Voyons ce qu'elle devient dans des cas particuliers.

1° Lorsqu'un des points extrêmes de la courbe est entièrement indéterminé, que l'on ait fixé ou non la direction de la tangente en ce point, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$ de ses coordonnées restent arbitraires, et leurs coefficients éga-

lés à zéro dans les termes aux limites donnent

$$a = 0, \quad b = 0.$$

L'équation (4) de la courbe se réduit, par conséquent, à $\rho = 0$, équation impossible qui avertit que dans ce cas il n'y a point de minimum.

2° Supposons que les points extrêmes A, B de la courbe soient donnés. On a $\delta\xi = 0$, les variations $\delta\xi'$, $\delta\eta'$ restant arbitraires (n° 120, 1°); leurs coefficients égalés à zéro donnent pour les deux limites

$$\rho^3 x'' = 0, \quad \rho^3 y'' = 0, \quad \text{ou} \quad \rho^2 x' = 0, \quad \rho^2 y' = 0,$$

puisque $\rho x'' = y'$, $\rho y'' = -x'$. Or x' et y' ne peuvent pas être nuls en même temps, puisque la somme de leurs carrés est égale à l'unité, il faut donc que ρ s'évanouisse aux deux points extrêmes, ou que l'on ait

$$ay_1 - bx_1 + c = 0, \quad ay_2 - bx_2 + c = 0,$$

x_1, y_1, x_2, y_2 étant les coordonnées des points A, B. Prenons la droite AB pour axe des x; les coordonnées y_1, y_2 seront nulles et les équations aux limites, devenues $bx_1 = c$, $bx_2 = c$, donneront $b(x_2 - x_1) = 0$, ou $b = 0$, et par suite $c = 0$. Les équations de la courbe (2) et (4) se réduisent alors à

$$\rho^2 = ay, \quad 2\rho = ax',$$

et l'on en tire successivement

$$a^2 x'^2 = 4ay, \quad \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{4y}{a}$$

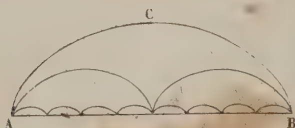
$$dx = \pm\, dy\sqrt{\frac{4y}{a - 4y}}.$$

Il est facile de reconnaître dans cette dernière équation l'équation d'une cycloïde engendrée par un cercle de

rayon $\frac{a}{8}$ qui roule sur l'axe des x. Comme, en outre, les extrémités de l'arc se trouvent sur ce même axe, on serait tenté d'en conclure que la courbe cherchée est une branche de cycloïde complète, tracée entre les deux points donnés A et B. C'est du moins le résultat auquel on s'arrête ordinairement.

On ne peut pas se dissimuler cependant que cette conclusion renferme quelque chose d'arbitraire, et qu'au fond rien ne prouve que la courbe doive se composer plutôt d'une seule que d'un nombre quelconque de cycloïdes. En supposant que l'on construise entre A et B (*fig.* 5) 1, 2, 3,..., n branches de cycloïde égales et con-

Fig. 5.



sécutives, on trouve pour l'aire comprise entre la courbe, sa développée et ses deux rayons de courbure extrêmes, ou pour l'intégrale $\frac{1}{2}\int \rho\, ds$, des valeurs proportionnelles à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$; en sorte que l'intégrale diminue indéfiniment et tend vers zéro, à mesure que les cycloïdes se multiplient et tendent à se confondre avec la droite AB. Il paraît donc que la droite AB considérée comme la limite d'une infinité de cycloïdes, est une espèce de solution singulière du problème, et que la cycloïde unique ACB ne donne un minimum qu'autant que l'on assujettit la courbe cherchée à ne pas avoir de point de rebroussement entre A et B.

3° Considérons encore le cas où les extrémités A, B

doivent se trouver sur deux courbes données. Les variations $\delta\xi'$, $\delta\eta'$ étant arbitraires, on a d'abord, comme dans le cas précédent,

$$ay_1 - bx_1 + c = 0, \quad ay_2 - bx_2 + c = 0,$$

ou

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b},$$

équation qui exprime que la droite AB fait avec les axes des x et des y des angles dont les cosinus sont proportionnels à a, b. Les termes aux limites fournissent en outre pour chacun des points A, B la condition

$$a\,\delta\xi + b\,\delta\eta = 0.$$

Or, puisque le point ξ, η ne peut varier que suivant la courbe limite, $\delta\xi$, $\delta\eta$ sont évidemment proportionnels aux cosinus des angles que la tangente à la courbe limite fait avec les axes des coordonnées. La dernière équation, jointe à la précédente, exprime donc que la droite AB est normale à chacune des courbes limites, ou que c'est la distance la plus courte entre ces courbes. Après avoir déterminé par cette condition les deux points limites A, B, on aura la courbe cherchée, en les unissant par une branche de cycloïde complète.

Problème X.

125. *Trouver la courbe qui a le plus grand ou le plus petit moment d'inertie par rapport à un point donné.*

Prenons le point donné pour origine des coordonnées et l'arc s pour variable indépendante, le moment d'inertie de la courbe sera exprimé par $\int (x^2 + y^2)\,ds$, les fonctions x et y étant liées entre elles par la condition $x'^2 + y'^2 = 1$; le problème revient donc à chercher le

maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \{ x^2 + y^2 + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) \} ds,$$

dans laquelle λ est une fonction de s de forme inconnue, mais invariable.

On a

$$V = x^2 + y^2 + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1),$$

$$P = 2x, \quad P_1 = 2\lambda x', \quad Q = 2y, \quad Q_1 = 2\lambda y',$$

et les équations de la courbe $P - \frac{dP_1}{ds} = 0$, $Q - \frac{dQ_1}{ds} = 0$ deviennent

(1) $$\begin{cases} x - \lambda' x' - \lambda x'' = 0, \\ y - \lambda' y' - \lambda y'' = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre les équations (1), multipliées la première par y, la seconde par x, on trouve

$$\lambda'(xy' - x'y) + \lambda(xy'' - x''y) = 0,$$

et en intégrant,

(2) $$\lambda(xy' - x'y) = c.$$

Les mêmes équations (1), multipliées respectivement par x', y', donnent d'ailleurs

$$xx' + yy' - \lambda' = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

(3) $$x^2 + y^2 - 2\lambda = 0.$$

Éliminant λ entre les équations (2) et (3), on trouve

$$(4) \qquad (x^2+y^2-k)(xy'-x'y)=2c,$$

équation générale de la courbe cherchée. Il paraît difficile de l'intégrer sans déterminer d'abord les constantes c et k, mais elle conduit à une relation remarquable entre le rayon de courbure ρ et le rayon vecteur r. En effet, quand on élimine λ' entre les équations (1), il vient

$$xy'-yx'=\lambda(y'x''-x'y'')=\mp\frac{\lambda}{\rho};$$

on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que le rayon de courbure fera un angle aigu ou obtus avec les y positifs (n° 123). En reportant cette valeur dans l'équation (2), on trouve

$$\lambda^2=\mp c\rho,$$

formule qui montre que la constante c doit être positive ou négative, suivant que la courbe tourne sa convexité en haut ou en bas. L'élimination de λ entre cette formule et l'équation (3) donne enfin

$$(5) \qquad \rho=\mp\frac{(x^2+y^2-k)^2}{4c}=\mp\frac{(r^2-k)^2}{4c}.$$

Ainsi le rayon de courbure ρ est une fonction algébrique du quatrième degré du rayon vecteur r.

126. Avant de discuter les conditions aux limites que la courbe doit remplir dans les divers cas particuliers, remarquons que si l'on appelle ξ, η les coordonnées de l'une ou de l'autre des extrémités de la courbe, on verra les termes aux limites de la variation δS se réduire à

$$k\,\delta(s_2-s_1)+\int_{s_1}^{s_2}(P_1\,\delta\xi+Q_1\,\delta\eta).$$

Cela posé, admettons d'abord que la longueur de la courbe soit donnée. Le terme $k\delta(s_2 - s_1)$ disparaîtra avec la variation $\delta(s_2 - s_1)$ sans détermination aucune de la constante k. Si l'on suppose en outre que l'une des extrémités soit fixe et l'autre mobile, les coordonnées de la seconde extrémité devront satisfaire aux conditions $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$, ou

$$\lambda x' = 0, \quad \lambda y' = 0,$$

et comme x', y' ne peuvent pas être nuls à la fois, il en résulte que la fonction λ doit s'évanouir à la limite dont il s'agit, ce qui détermine la constante c, car l'équation (2) exige alors qu'on ait $c = 0$. Par suite, l'équation (4) de la courbe devient

$$xy' - x'y = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y = ax,$$

équation d'une droite passant par l'origine. Il est d'ailleurs facile de comprendre, indépendamment de toute démonstration, que cette droite donne le minimum ou le maximum, suivant qu'elle se dirige du point fixe vers le centre des coordonnées ou en sens opposé.

127. Considérons en second lieu le cas où l'on se propose seulement de mener entre deux points donnés une courbe telle, que son moment d'inertie soit minimum, sans déterminer d'avance la longueur de la courbe. La variation $\delta(s_2 - s_1)$ étant arbitraire, on aura $k = 0$, ce qui fait prendre à l'équation (5) la forme

$$\rho = mr^4.$$

La courbe jouit donc de cette propriété que son rayon de

courbure est proportionnel à la quatrième puissance du rayon vecteur.

Ajoutons que l'équation différentielle de la courbe sera

$$(x^2+y^2)\frac{xdy-ydx}{ds}=2c,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$d\theta=\pm\frac{2cdr}{r\sqrt{r^6-4c^2}};$$

il paraît difficile d'en tirer quelque résultat simple.

Problème XI.

128. *Trouver la position d'équilibre d'un fil flexible et inextensible dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.*

On sait, par les éléments de la mécanique, que le fil ne peut être en équilibre qu'autant que son centre de gravité se trouve le plus bas possible.

Admettons d'abord que la densité du fil varie d'un point à l'autre, et désignons par μ la masse d'une unité de longueur du fil; μ sera une certaine fonction de l'arc s. En supposant l'axe des y vertical et opposé à la direction de la pesanteur, on trouve pour la coordonnée verticale du centre de gravité du fil l'expression

$$\frac{\int\mu y\,ds}{\int\mu\,ds};$$

telle est la quantité qu'il s'agit de rendre minimum, tandis que la longueur du fil et, par conséquent, sa masse entière $\int\mu\,ds$ doivent rester constantes. Donc, si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, les conditions du problème seront

$$\int\mu y\,ds=\text{min.},\quad \int\mu\,ds=\text{const.},\quad x'^2+y'^2=1,$$

et la question se réduira à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \{\mu(y+c) + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1)\} ds,$$

c étant une constante et λ une fonction indéterminée de s.

Cela posé, on a

$$V = \mu(y+c) + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1),$$
$$P = 0, \quad P_1 = 2\lambda x', \quad Q = \mu, \quad Q_1 = 2\lambda y';$$

et les équations indéfinies $P - \frac{dP_1}{ds} = 0$, $Q - \frac{dQ_1}{ds} = 0$ deviennent

$$2\frac{d.\lambda x'}{ds} = 0,$$
$$2\frac{d.\lambda y'}{ds} = \mu.$$

En intégrant et faisant, pour abréger,

$$M = \int \mu\, ds,$$

on trouve

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\lambda x' = a, \\ 2\lambda y' = M + b, \end{cases}$$

a et b étant des constantes arbitraires. Élevées au carré et ajoutées, les équations (1) donnent

$$2\lambda = \pm\sqrt{a^2 + (M+b)^2},$$

et, par suite, en éliminant 2λ,

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = \pm \dfrac{a\,ds}{\sqrt{a^2 + (M+b)^2}}, \\ dy = \pm \dfrac{(M+b)\,ds}{\sqrt{a^2 + (M+b)^2}}. \end{cases}$$

Lorsque la fonction μ est connue, on peut intégrer ces équations, et obtenir x, y exprimées en fonctions de s. En éliminant s on aura ensuite l'équation de la courbe cherchée.

129. Mais on peut renverser la question et demander quelle doit être la loi de densité, ou la fonction μ, pour que le fil se dispose suivant une courbe déterminée. En divisant l'une par l'autre les équations (2), on trouve

$$\mathrm{M} + b = a\,\frac{dy}{dx},$$

et en différentiant par rapport à s

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds} = \mu = a\,\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds}.$$

L'équation de la courbe étant donnée, on peut exprimer le second membre en fonction de s, et déduire ainsi la forme de la fonction μ. Si l'on demande, par exemple, que la courbe soit un arc de cercle de rayon r, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\frac{s}{r},$$

l'arc s étant compté à partir du point le plus bas, et, par conséquent,

$$\mu = \frac{a}{r}\sec^2\frac{s}{r}.$$

Telle doit être la loi de densité du fil, pour que, dans son état d'équilibre, il affecte un arc de cercle.

130. Supposons maintenant que la densité soit constante. Si l'on fait $\mu = 1$, on aura $\mathrm{M} = s$; substituant cette valeur dans les équations (2) et intégrant, on

trouve

$$x - h = a\,\mathrm{l}\,\frac{s + b + \sqrt{a^2 + (s + b)^2}}{a},$$

$$y - k = \sqrt{a^2 + (s + b)^2},$$

et, en éliminant $s + b$,

$$y - k = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-h}{a}} + e^{-\frac{x-h}{a}}\right).$$

La courbe est donc, dans ce cas, une chaînette. Les trois constantes que renferme son équation, se déterminent par la condition que la courbe passe par les deux points fixes, et qu'elle ait entre ces points une longueur donnée.

Si les extrémités du fil, au lieu d'être attachées à deux points fixes, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, pouvaient glisser sur deux courbes données, on trouverait facilement, en examinant les termes aux limites de l'intégrale proposée, que l'équilibre n'aurait lieu qu'autant que les extrémités du fil seraient normales aux courbes limites. Ce résultat subsiste quelle que soit la loi de densité dans le fil.



ONZIÈME LEÇON.

Recherche de courbes dans l'espace ; cas où l'on prend l'arc pour variable indépendante. — Ligne la plus courte sur une surface donnée. — Ligne la plus courte de courbure constante.

---

131. Lorsqu'il s'agit d'appliquer le calcul des variations à la recherche d'une courbe dans l'espace, rapportée à un système de coordonnées rectilignes et rectangulaires x, y, z, on peut regarder deux quelconques de ses coordonnées, par exemple y et z, comme fonctions inconnues de la troisième x. Mais il est souvent plus commode, et toujours plus élégant, de prendre l'arc s pour variable indépendante, en considérant x, y, z comme trois fonctions à déterminer, et liées entre elles par l'équation différentielle

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

dont on tiendra compte au moyen d'un facteur indéterminé, fonction de s (n° 49). La marche à suivre dans la recherche des courbes planes, lorsqu'on prend l'arc s pour variable indépendante, exposée dans la leçon précédente, s'étend d'elle-même au cas de courbes dans l'espace, et il suffira de donner ici un aperçu succinct des formules relatives à ce cas plus général.

Soient x, y, z les coordonnées rectilignes d'un point quelconque d'une courbe dans l'espace, $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$ leurs dérivées successives, prises par rapport à l'arc s, et supposons qu'il s'agisse de déterminer

la forme que doit avoir la courbe pour que l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{F}(s,\ x,\ x',\ x'',\ y,\ y',\ y'',\ z,\ z',\ z'')\,ds$$

devienne maximum ou minimum. Les fonctions inconnues x, y, z étant liées entre elles par la condition

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

si l'on fait

$$\mathrm{V} = \mathrm{F} + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1),$$

λ étant une fonction indéterminée de s, le problème reviendra à chercher le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$\mathrm{S} = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{V}\,ds.$$

Désignons respectivement par P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2, R, R_1, R_2 les dérivées partielles de V relatives à x, x', x'', y, y', y'', z, z', z'', nous aurons, pour déterminer les formes générales des fonctions x, y, z, λ, les équations indéfinies

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{P}_1}{ds} + \frac{d^2\mathrm{P}_2}{ds^2} = 0,\\ &\mathrm{Q} - \frac{d\mathrm{Q}_1}{ds} + \frac{d^2\mathrm{Q}_2}{ds^2} = 0,\\ &\mathrm{R} - \frac{d\mathrm{R}_1}{ds} + \frac{d^2\mathrm{R}_2}{ds^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Dans tous les cas où la fonction F, dans l'intégrale proposée, ne renferme pas explicitement l'arc s, mais seulement les coordonnées x, y, z avec leurs dérivées,

les équations (1) admettent une première intégrale facile à obtenir. En effet, puisque non-seulement la dérivée partielle de F relative à s, mais aussi celle de V par rapport à λ, ou $x'^2+y'^2+z'^2-1$, sont nulles, la dérivée totale de V se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{dV}{ds} &= Px' + P_1 x'' + P_2 x''' \\ &+ Qy' + Q_1 y'' + Q_2 y''' \\ &+ Rz' + R_1 z'' + R_2 z'''.\end{aligned}$$

Si l'on y substitue les valeurs de P, Q, R, tirées de l'équation (1), le second membre deviendra une dérivée exacte, et il viendra, en intégrant,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} V &= k + P_1 x' + Q_1 y' + R_1 z' \\ &+ P_2 x'' - \frac{dP_2}{ds} x' + Q_2 y'' - \frac{dQ_2}{ds} y' + R_2 z'' - \frac{dR_2}{ds} z'.\end{aligned}\right.$$

132. La considération des termes aux limites de la variation δS conduit très-facilement aux conditions que doivent remplir les extrémités de la courbe. En appelant indistinctement ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' les valeurs de x, y, z, x', y', z', correspondantes à l'une ou à l'autre des limites de l'intégrale, et supposant toujours que F ne renferme pas explicitement l'arc s, on verra ces termes se réduire à

$$\begin{aligned}& k\,\delta(s_2 - s_1) \\ &+ \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta + \left(R_1 - \frac{dR_2}{ds}\right)\delta\zeta \right\} \\ &+ \int_{s_1}^{s_2} (P_2\,\delta\xi' + Q_2\,\delta\eta' + R_2\,\delta\zeta'),\end{aligned}$$

et l'on en conclura tout d'abord que la constante k devra être nulle toutes les fois que la longueur $s_2 - s_1$ de l'arc

ne sera pas déterminée à priori. Examinons maintenant les deux hypothèses suivantes :

1° *Les points extrêmes de la courbe sont fixes.* — On a $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$, $\delta\zeta = 0$, tandis qu'il est permis de regarder les variations $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ comme arbitraires et indépendantes les unes des autres, puisqu'on a déjà tenu compte, au moyen du facteur λ, de la liaison qui existe entre x', y', z', et, par suite, entre les valeurs limites ξ', η', ζ' de ces dérivées; on en conclura que les trois équations

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad R_2 = 0$$

doivent avoir lieu pour chacune des extrémités de la courbe.

2° *Les points extrêmes sont seulement assujettis à rester sur deux surfaces données.* — Soit

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation de l'une de ces surfaces, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ seront liées entre elles par la relation

$$\frac{df}{d\xi}\delta\xi + \frac{df}{d\eta}\delta\eta + \frac{df}{d\zeta}\delta\zeta = 0;$$

les termes aux limites fournissent d'ailleurs la condition

$$\left(P_1 - \frac{dP_2}{ds}\right)\delta\xi + \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{ds}\right)\delta\eta + \left(R_1 - \frac{dR_2}{ds}\right)\delta\zeta = 0.$$

Éliminant l'une des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, et égalant à zéro les coefficients des deux autres, il vient

$$\frac{P_1 - \dfrac{dP_2}{ds}}{\dfrac{df}{d\xi}} = \frac{Q_1 - \dfrac{dQ_2}{ds}}{\dfrac{df}{d\eta}} = \frac{R_1 - \dfrac{dR_2}{ds}}{\dfrac{df}{d\zeta}}.$$

Telles sont les équations que doivent vérifier les coordonnées de l'extrémité que l'on considère.

Les directions des tangentes extrêmes, ou les valeurs de ξ', $\varkappa'$, ζ', n'étant pas données, on aura en outre, comme dans le cas précédent, les trois équations

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad R_2 = 0$$

pour chacune des limites.

133. Pour ne pas être obligé d'interrompre la discussion des problèmes qui vont suivre, nous croyons utile de rappeler ici quelques formules relatives à la théorie des courbes dans l'espace et d'expliquer le sens que nous attachons à certaines expressions. Considérons trois droites A, B, C, prises chacune dans une direction déterminée et faisant avec les axes des x, y, z, des angles dont les cosinus sont : pour la première droite a, a', a'', pour la seconde b, b', b'', pour la troisième c, c', c''; admettons que la troisième droite C soit perpendiculaire aux deux autres A et B, lesquelles comprennent entre elles un angle quelconque θ, on aura

$$ab + a'b' + a''b'' = \cos\theta,$$
$$ac + a'c' + a''c'' = 0,$$
$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

et, en éliminant tour à tour c, c', c'',

$$(3) \qquad \frac{a'b'' - a''b'}{c} = \frac{a''b - ab''}{c'} = \frac{ab' - a'b}{c''} = \pm \sin\theta.$$

Les cas où il faut prendre l'un ou l'autre des deux signes du dernier membre se distinguent de la manière suivante : concevons que par un point quelconque on mène trois droites A', B', C' parallèles à A, B, C, ces droites pourront être considérées comme les arêtes d'un angle trièdre dans lequel deux des angles plans sont droits, et le troi-

sième égal à θ; de même on peut regarder les axes positifs des coordonnées x, y, z, comme les arêtes d'un second angle trièdre, dans lequel chacun des trois angles plans est un angle droit. Cela posé, deux cas sont possibles : les arêtes A′, B′, C′ du premier angle trièdre se suivent dans le même ordre que les axes des x, y, z, arêtes du second angle trièdre, ou elles se suivent dans l'ordre inverse; en d'autres termes, si l'on applique C′ sur l'axe des z, B′ sur l'axe des y, la droite A′ pourra se trouver du même côté du plan yz que l'axe des x ou du côté opposé, de sorte qu'en faisant l'angle θ égal à 90°, les droites A′, B′, C′ se superposeront dans le premier cas aux axes des x, y, z, tandis que dans le second cas la superposition n'aura pas lieu. Le signe supérieur, dans le dernier membre de la formule (3), correspond au premier cas, le signe inférieur au second.

Nous dirons, pour faciliter le langage, que la succession des droites A, B, C est *directe* dans le premier cas, *inverse* dans le second.

Si les quantités $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ étaient seulement proportionnelles aux cosinus des angles que les droites A, B, C font avec les axes des x, y, z, et qu'en outre chacune de ces quantités eût le même signe que le cosinus qui lui correspond, on aurait encore

$$\frac{a'b''-a''b'}{c}=\frac{a''b-ab''}{c'}=\frac{ab'-a'b}{c''},$$

et chacune de ces fractions serait égale à

$$\pm\sin\theta\sqrt{\frac{(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)}{c^2+c'^2+c''^2}};$$

on prendrait le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que la succession des droites A, B, C serait directe ou inverse.

134. On déduirait très-simplement de ces formules toute la théorie des courbes à double courbure; mais nous ne rappellerons ici que quelques théorèmes fondamentaux. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe, les cosinus des angles que la tangente T à la courbe fait avec les axes des x, y, z, seront proportionnels aux différentielles

$$dx, \quad dy, \quad dz;$$

de même, quelle que soit la variable indépendante,

$$dx + d^2x, \quad dy + d^2y, \quad dz + d^2z$$

seront proportionnels aux cosinus qui déterminent la direction de la tangente T′ en un point P′ infiniment voisin de P. Donc, si l'on appelle $d\omega$ l'angle de contingence ou l'angle aigu compris entre les deux tangentes consécutives T, T′, et X, Y, Z les cosinus des angles que la droite O, perpendiculaire aux deux tangentes, et par conséquent au plan osculateur de la courbe, fait avec les axes des x, y, z, on aura

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{\mathrm{X}\,ds^3} = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{\mathrm{Y}\,ds^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\mathrm{Z}\,ds^3} = \frac{d\omega}{ds},$$

pourvu que la droite O soit prise dans une direction telle, que la succession des droites T, T′, O soit directe. Or $\frac{d\omega}{ds}$ étant évidemment réciproque au rayon de courbure ρ, si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, il viendra

$$(4) \qquad \frac{y'z'' - z'y''}{\mathrm{X}} = \frac{z'x'' - x'z''}{\mathrm{Y}} = \frac{x'y'' - y'x''}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\rho}.$$

Pour trouver la direction du rayon de courbure ρ, ou

les angles α, β, γ que ce rayon fait avec les axes des coordonnées, nous ferons remarquer que ρ est à la fois perpendiculaire à la tangente T et à la normale O, et que, en vertu de ce que nous avons déjà admis, la succession des droites O, T, ρ est nécessairement directe; on aura donc

$$\frac{Yz' - Zy'}{\cos\alpha} = \frac{Zx' - Xz'}{\cos\beta} = \frac{Xy' - Yx'}{\cos\gamma} = 1;$$

et, en éliminant X, Y, Z au moyen des équations (4),

(5) $$\cos\alpha = \rho x'', \quad \cos\beta = \rho y'', \quad \cos\gamma = \rho z'',$$

(6) $$\frac{1}{\rho} = (x''^2 + y''^2 + z''^2)^{\frac{1}{2}}.$$

135. Supposons maintenant que la courbe soit tracée sur une surface ayant pour équation différentielle

$$dz = pdx + qdy.$$

Si un plan roulait le long de la courbe de manière à être toujours tangent à la surface, ses intersections successives engendreraient une certaine surface développable Σ; nous allons chercher ce que devient cette courbe lorsque la surface Σ est développée sur un plan.

Considérons deux plans tangents menés à la surface donnée, en deux points P, P′ de la courbe infiniment voisins l'un de l'autre; la normale N au premier plan fera avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus seront proportionnels à p, q, -1 et auront les mêmes signes que ces quantités, pourvu que la normale N soit menée en dessous du plan, de manière à faire un angle obtus avec l'axe des z; de même $p + dp$, $q + dq$, -1 seront proportionnels aux cosinus des angles que la normale N′ au second plan tangent fera avec les axes. L'intersection G de ces deux plans, génératrice de la surface dévelop-

pable, est perpendiculaire à la fois aux deux normales, et si l'on appelle l, m, n les cosinus qui déterminent sa direction, on aura

$$\frac{dq}{l} = \frac{-dp}{m} = \frac{pdq - qdp}{n} = +\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2},$$

à la condition que la droite G sera prise dans la direction nécessaire pour que la succession des droites N, N', G soit directe. L'angle φ compris entre la génératrice G et la tangente T à la courbe sera donc déterminé par l'équation

$$(7) \qquad \cos\varphi = \frac{x'\,dq - y'\,dp + z'(pdq - qdp)}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}}.$$

Si l'on donne à l'arc s un accroissement infiniment petit ds, l'angle φ recevra un accroissement correspondant $d\varphi$, qu'il importe de déterminer. Pour simplifier le calcul, nous admettrons un moment que le plan xy coïncide avec le plan tangent au point P, et que l'axe des x soit dirigé suivant la tangente à la courbe, de sorte que l'on ait, en ce point P, $p = 0$, $q = 0$, $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$, et aussi $x'' = 0$, puisqu'en général $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$. On aura alors simplement

$$\cos\varphi = \frac{dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2}},$$

et de même

$$\sin\varphi = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2}},$$

en admettant que T, G, N, se succèdent dans l'ordre des axes des x, y, z.

Cela posé, si l'on différentie l'équation (7) et qu'on y substitue après la différentiation les valeurs $p = 0$, $q = 0$, $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$, $x'' = 0$, on trouvera sans peine,

en divisant le résultat par $-\sin\varphi$,

$$d\varphi = y''\,ds + \frac{dq\,d^2p - dp\,d^2q}{dp^2 + dq^2}.$$

La différentielle $d\varphi$ exprime la différence $\varphi' - \varphi$ des angles que deux génératrices G′, G, passant par deux points P, P′ de la courbe, infiniment voisins l'un de l'autre, font avec les tangentes T, T′ en ces points. Ces génératrices ne sont pas en général parallèles entre elles, et l'on trouve facilement l'angle $d\psi$ qu'elles comprennent, en observant que la normale N est à la fois perpendiculaire à chacune d'elles, et que les droites G, G′, N font avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à

$$\begin{array}{lll} dq, & -dp, & p\,dq - q\,dp, \\ dq + d^2q, & -(dp + d^2p), & p\,d^2q - q\,d^2p; \\ p & q & -1. \end{array}$$

En effet, appliquée à ce cas particulier, la formule (3) donnera, quand on aura fait $p = 0$, $q = 0$, et qu'on supposera directe la succession des droites G, G′, N,

$$d\psi = \frac{dq\,d^2p - dp\,d^2q}{dp^2 + dq^2}.$$

Dans cette même hypothèse, la différence $d\psi - d\varphi$ est évidemment égale à l'angle de contingence $d\omega$, compris entre deux tangentes consécutives à la courbe aplanie. Si, au contraire, la succession des droites G, G′, N était inverse, il faudrait écrire $-d\psi$ au lieu de $d\psi$ dans la dernière formule, mais en même temps l'angle de contingence $d\omega$ deviendrait $d\psi + d\varphi$. Il en résulte, en remplaçant $d\varphi$ et $d\psi$ par leurs valeurs, qu'on aura dans les deux cas

$$\frac{d\omega}{ds} = \mp y'',$$

en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant que la succession des droites G, G′, N est directe ou inverse. On aurait obtenu le même résultat en admettant que T, G, N se succèdent dans l'ordre inverse des axes des x, y, z. En appelant θ l'angle aigu compris entre le rayon de courbure ρ et la normale N, et r le rayon de courbure de la courbe devenue plane, on en déduit la formule très-simple

$$(8) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\sin\theta}{\rho},$$

que l'on peut regarder comme l'équation de la courbe rabattue. Cette équation est d'ailleurs indépendante du choix particulier des coordonnées. Traduite en langage ordinaire, elle renferme le théorème suivant assez remarquable :

Une surface développable étant circonscrite à une surface quelconque de manière à la toucher le long d'une courbe donnée, le rapport entre le rayon de courbure de cette courbe à double courbure et celui de la courbe plane avec laquelle elle coïncide lorsqu'on rabat la surface développable, est, dans tous les points correspondants des deux courbes, égal au sinus de l'angle que le rayon de courbure de la courbe donnée fait avec la normale commune aux deux surfaces.

Ces principes établis, revenons aux applications du calcul des variations.

Problème XII.

136. *Trouver la ligne la plus courte entre deux points sur une surface donnée.*

Soit $u = 0$ l'équation de la surface donnée, et prenons l'arc s pour variable indépendante; les conditions du problème étant

$$u = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \int ds = \text{minimum},$$

la question reviendra à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ 1 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u \right\} ds,$$

dans laquelle λ et μ représentent deux fonctions indéterminées de s.

Conformément aux notations adoptées, on a

$$V = 1 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u,$$

$$P = \mu \frac{du}{dx}, \quad Q = \mu \frac{du}{dy}, \quad R = \mu \frac{du}{dz},$$

$$P_1 = 2\lambda x', \quad Q_1 = 2\lambda y', \quad R_1 = 2\lambda z',$$

ce qui conduit aux équations indéfinies

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu \frac{du}{dx} - 2\lambda' x' - 2\lambda x'' = 0, \\ &\mu \frac{du}{dy} - 2\lambda' y' - 2\lambda y'' = 0, \\ &\mu \frac{du}{dz} - 2\lambda' z' - 2\lambda z'' = 0, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre

$$u = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Les équations (1), multipliées respectivement par x', y', z' et ajoutées, donnent

$$2\lambda' = 0, \quad \text{ou} \quad 2\lambda = c,$$

ce qui les réduit à

$$\mu \frac{du}{dx} - cx'' = 0, \quad \mu \frac{du}{dy} - cy'' = 0, \quad \mu \frac{du}{dz} - cz'' = 0;$$

d'où l'on tire, en éliminant μ,

$$(2) \qquad \frac{x''}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{y''}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{z''}{\left(\frac{du}{dz}\right)},$$

équations différentielles de la courbe cherchée. On ne saurait les intégrer sans spécialiser d'abord la fonction u, ou la nature de la surface donnée, mais elles expriment, même sous cette forme générale, une propriété remarquable de la ligne la plus courte. On sait, en effet, que les dérivées partielles $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que la normale à la surface donnée fait avec les axes des x, y, z, et que x'', y'', z'' sont proportionnels aux cosinus des angles que le rayon de courbure de la ligne cherchée fait avec les mêmes axes. La formule (2) nous apprend donc que ces deux lignes ont la même direction, c'est-à-dire que *le rayon de courbure de la ligne la plus courte est partout normal à la surface sur laquelle elle est tracée*. On appelle en général *lignes géodésiques* les lignes qui jouissent de cette propriété.

L'angle compris entre le rayon vecteur et la normale étant nul, il en résulte encore, d'après le théorème du numéro précédent, que *si une surface développable touche la surface donnée suivant une ligne géodésique, et qu'on rabatte la première surface, la ligne géodésique deviendra une ligne droite*.

137. Pour obtenir l'équation de la courbe sous sa forme habituelle, faisons pour un moment

$$X = dyd^2z - dzd^2y, \quad Y = dzd^2x - dxd^2z$$
$$Z = dxd^2y - dyd^2x,$$

sans particuliser d'abord la variable indépendante; on aura

$$x'' = \frac{Y dz - Z dy}{ds^4}, \quad y'' = \frac{Z dx - X dz}{ds^4}, \quad z'' = \frac{X dy - Y dx}{ds^4}.$$

Si l'on appelle p, q, r, s, t les dérivées partielles de z des

deux premiers ordres, tirées de l'équation $u=0$ de la surface donnée, p, q, -1 seront proportionnels à $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ et la formule (2) pourra s'écrire

$$\frac{\mathrm{Y}\,dz-\mathrm{Z}\,dy}{p}=\frac{\mathrm{Z}\,dx-\mathrm{X}\,dz}{q}=\frac{\mathrm{X}\,dy-\mathrm{Y}\,dx}{-1}.$$

Multiplions respectivement par X, Y, Z les numérateurs et les dénominateurs de ces trois fractions, la somme des numérateurs deviendra nulle; celle des dénominateurs devra donc aussi s'évanouir, sans quoi chacune des fractions serait nulle, et l'on aurait constamment

$$x''=0,\quad y''=0,\quad z''=0,$$

et, par suite (n° 134), $\rho=\infty$, ce qui n'est pas généralement possible. Il en résulte

$$p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z}=0,$$

ou

$$p(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+q(dz\,d^2x-dx\,d^2z)-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0.$$

Prenons maintenant x pour variable indépendante, et introduisons les valeurs

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2+q\,d^2y,$$

il viendra, après quelques réductions faciles à effectuer,

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)\left(r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}\right)=0,$$

équation différentielle du second ordre, laquelle, jointe à $u=0$, déterminera la ligne géodésique.

138. Les lignes géodésiques tracées sur un ellipsoïde ont des propriétés intéressantes dont nous ferons connaître quelques-unes, indiquées d'abord par M. Joachimsthal.

Soient a, b, c les trois demi-axes de l'ellipsoïde, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et les équations (2), auxquelles doivent satisfaire les coordonnés de la ligne géodésique, deviendront

$$\frac{x''}{\left(\frac{x}{a^2}\right)}=\frac{y''}{\left(\frac{y}{b^2}\right)}=\frac{z''}{\left(\frac{z}{c^2}\right)}=t,$$

ou

$$(3)\qquad x''=\frac{tx}{a^2},\qquad y''=\frac{ty}{b^2},\qquad z''=\frac{tz}{c^2},$$

t étant une variable auxiliaire.

En appelant P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde, et D le demi-diamètre parallèle à la tangente à la ligne géodésique, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{P^2}=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}, \\ \dfrac{1}{D^2}=\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{z'^2}{c^2}. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on différentie deux fois de suite l'équation de l'ellipsoïde, il viendra

$$\frac{xx''}{a^2}+\frac{yy''}{b^2}+\frac{zz''}{c^2}+\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=0;$$

substituant les valeurs (3), et ayant égard aux équations (4), on en déduit

$$\frac{t}{P^2}+\frac{1}{D^2}=0,\quad \text{ou}\quad t=-\frac{P^2}{D^2}.$$

Les équations (3) élevées au carré et ajoutées donnent d'ailleurs

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{t^2}{P^2};$$

donc, en éliminant t, on trouve

$$(5) \qquad \rho = \frac{D^2}{P},$$

ce qui fournit déjà un moyen très-simple de calculer le rayon de courbure ρ de la ligne géodésique. Il en résulte en outre cette proposition :

Les lignes géodésiques qui passent par un même point de l'ellipsoïde, ont dans ce point leurs rayons de courbure proportionnels aux carrés des demi-diamètres parallèles à leurs tangentes.

Ajoutons qu'on parvient facilement à intégrer une fois l'équation différentielle du second ordre de la ligne géodésique, lorsque cette ligne est tracée sur un ellipsoïde. En effet, si l'on différentie les deux équations (4), il vient d'abord

$$-\frac{1}{P^3}\frac{dP}{ds} = \frac{xx'}{a^4} + \frac{yy'}{b^4} + \frac{zz'}{c^4},$$

$$-\frac{1}{D^3}\frac{dD}{ds} = \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2}$$

$$= -\frac{P^2}{D^2}\left(\frac{xx'}{a^4} + \frac{yy'}{b^4} + \frac{zz'}{c^4}\right).$$

Multipliant la première équation par P^2, la seconde par D^2, et ajoutant, il vient

$$\frac{dP}{P} + \frac{dD}{D} = 0,$$

et, en intégrant

$$PD = \text{const.} = C^2.$$

C'est l'intégrale cherchée, ou l'équation différentielle du premier ordre de la ligne géodésique. Combinée avec

l'équation (5), $\rho = \frac{D^2}{P}$, elle donne

$$(6) \qquad \rho = \frac{C^4}{P^3},$$

et conduit au théorème suivant :

Le long d'une même ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde, la courbure varie proportionnellement au cube de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde.

Comme la perpendiculaire P dépend uniquement des coordonnées x, y, z du point que l'on considère, et nullement de la direction que la ligne géodésique a en ce point, l'équation (6) donne encore lieu à cet autre théorème :

Un triangle étant formé par des lignes géodésiques sur la surface d'un ellipsoïde, si l'on désigne par ρ_1, ρ'_1, ρ_2, ρ'_2, ρ_3, ρ'_3, *dans l'ordre où ils se succèdent, les rayons de courbure de ces lignes aux sommets du triangle, les deux produits des rayons alternes ou non contigus seront égaux, c'est-à-dire, on aura*

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \rho'_1 \rho'_2 \rho'_3.$$

On sait que deux sections normales d'une surface quelconque ont la même courbure lorsqu'elles font des angles égaux avec l'une ou l'autre des sections principales ou des sections auxquelles appartiennent la plus grande et la plus petite courbure ; il résulte donc du théorème que nous venons d'énoncer, que si, dans le triangle formé sur la surface de l'ellipsoïde par trois lignes géodésiques, deux des angles sont partagés en deux parties égales par des sections principales, il en sera de même du troisième angle.

Sur un ellipsoïde de révolution tous les méridiens sont

évidemment des lignes géodésiques; désignant par ρ_0 le rayon de courbure d'un méridien, on aura donc, en vertu de la formule (6),

$$\rho_0 = \frac{C_0^4}{P^3},$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{C^4}{C_0^4} = \text{const.};$$

ainsi, *sur les ellipsoïdes de révolution, le rapport entre la courbure de la ligne géodésique et la courbure du méridien reste le même pour tous les points d'une même ligne géodésique.*

Cette propriété avait déjà été signalée par M. Gudermann (Journal de Crelle, t. XVII).

139. Revenons maintenant à la question primitive de la ligne la plus courte sur une surface quelconque pour examiner les conditions auxquelles doivent satisfaire les extrémités de la courbe. Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de l'une ou de l'autre de ces extrémités, les termes aux limites de la variation de l'intégrale proposée deviendront

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ (V - P_1 x' - Q_1 y' - R_1 z')\delta s + P_1 \delta\xi + Q_1 \delta\eta + R_1 \delta\zeta \right\}$$

$$= (1 - c)\delta(s_2 - s_1) + c\int_{s_1}^{s_2} (x'\delta\xi + y'\delta\eta + z'\delta\zeta).$$

Ce seront en même temps les seuls termes qui restent de la variation de l'intégrale, quand on aura déterminé x, y, z en fonction de s de manière à vérifier à la fois les équations (1) et les conditions $u = 0$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Mais alors la courbe sera une ligne géodésique dont la longueur s, représentée précisément par l'intégrale pro-

posée, sera égale à $s_2 - s_1$, en sorte que $s_2 - s_1 = s$. On aura donc pour la variation de la longueur d'une ligne géodésique,

$$\delta s = (1 - c)\,\delta s + c \int_{s_1}^{s_2} (x'\,\delta\xi + y'\,\delta\eta + z'\,\delta\zeta),$$

et, en transposant,

$$(7) \qquad \delta s = \int_{s_1}^{s_2} (x'\,\delta\xi + y'\,\delta\eta + z'\,\delta\zeta).$$

Cette expression disparaît d'elle-même avec les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, chaque fois que les points extrêmes restent fixes. Mais si ces points sont mobiles, si l'on cherche seulement la ligne la plus courte entre deux courbes données sur une surface, on aura pour chacune des extrémités la condition

$$x'\,\delta\xi + y'\,\delta\eta + z'\,\delta\zeta = 0.$$

Or les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont évidemment proportionnelles aux cosinus des angles de la tangente à la courbe limite; cette condition exige donc que la ligne la plus courte rencontre sous un angle droit chacune des courbes limites.

140. La forme (7) sous laquelle nous venons de mettre la variation de la longueur s d'une ligne géodésique conduit à plusieurs conséquences remarquables. Concevons que la ligne s varie d'une manière quelconque sans changer de nature, c'est-à-dire sans cesser d'être une ligne géodésique; appelons σ l'arc décrit par l'une des extrémités, nous aurons

$$\delta\xi = \frac{d\xi}{d\sigma}\,\delta\sigma, \quad \delta\eta = \frac{d\eta}{d\sigma}\,\delta\sigma, \quad \delta\zeta = \frac{d\zeta}{d\sigma}\,\delta\sigma,$$

et l'équation (7) deviendra

$$\delta s = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{d\sigma} \right) \delta\sigma.$$

Or, le coefficient de $\delta\sigma$ est le cosinus de l'angle sous lequel se rencontrent la ligne géodésique s et la courbe limite σ, chacune d'elles étant prise dans la direction suivant laquelle l'arc s ou σ est compté. En désignant par φ cet angle, on aura donc

$$\delta s = \int_{s_1}^{s_2} \cos\varphi\, \delta\sigma.$$

Pour simplifier davantage, désignons par φ_0, σ_0 les valeurs de φ et de σ relatives au point initial, et réservons les notations sans indice φ, σ pour la seconde extrémité de la courbe; nous aurons définitivement

$$(8) \qquad \delta s = \cos\varphi\,\delta\sigma - \cos\varphi_0\,\delta\sigma_0.$$

Le second terme $\cos\varphi_0\,\delta\sigma_0$ serait nul, si le point initial était fixe, ou seulement si la ligne géodésique s était normale à la courbe σ_0 décrite par ce point, puisque dans le premier cas $\delta\sigma_0 = 0$, dans le second $\cos\varphi_0 = 0$.

Si l'on avait en outre $\delta s = 0$, c'est-à-dire si la longueur de la ligne s était invariable, l'équation (8) réduite à $\cos\varphi = 0$ exprimerait que la ligne s est aussi normale à la courbe σ décrite par la seconde extrémité. Nous pouvons donc énoncer ces deux théorèmes dus à Gauss (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) :

Étant tracées sur une surface courbe, à partir d'un même point initial, une infinité de lignes géodésiques de même longueur, la courbe joignant leurs extrémités sera normale à chacune d'elles.

On a donné quelquefois à cette courbe le nom de *cercle géodésique*.

Une courbe quelconque étant donnée sur une surface, si l'on conçoit une infinité de lignes géodésiques de même longueur partant sous des angles droits des différents points de cette courbe, la ligne joignant leurs extrémités sera normale à chacune des lignes géodésiques.

141. Pour seconde application de la formule (8), cherchons une courbe telle que le rapport des distances géodésiques s, s' de chacun de ses points à deux courbes données soit constant.

La distance géodésique d'un point à une courbe se mesure suivant la ligne géodésique qui passant par le point est normale à la courbe. Soit σ l'arc de la courbe cherchée, et désignons par φ, φ' les angles sous lesquels les lignes géodésiques s, s' coupent respectivement cette courbe. Puisque chacune des lignes s, s' est supposée normale aux courbes données, sur lesquelles se meuvent leurs points de départ, on a $\cos\varphi_0 = 0$, $\cos\varphi'_0 = 0$, et les variations de s, s' deviennent simplement

$$\delta s = \cos\varphi\, \delta\sigma, \quad \delta s' = \cos\varphi'\, \delta\sigma.$$

Cela posé, l'hypothèse admise

$$\frac{s}{s'} = \text{const.} = e$$

donne successivement

$$s - es' = 0, \quad \delta s - e\,\delta s' = 0, \quad \frac{\delta s}{\delta s'} = e.$$

On aura donc, en substituant les valeurs de δs, $\delta s'$,

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = e,$$

ce qui exprime la propriété caractéristique de la courbe cherchée.

Dans le cas particulier où la surface est un plan, où l'une des courbes données se réduit à un point et l'autre à une ligne droite, la courbe cherchée est une section conique dont l'excentricité est égale au rapport e. Ainsi dans toute section conique les cosinus des angles que fait la tangente avec les distances du point de contact à l'un des foyers et à la directrice correspondante, sont dans un rapport constant, égal à l'excentricité e; d'où l'on déduit cette propriété connue relativement à la réfraction :

Les rayons lumineux qui arrivent, parallèlement au grand axe, sur une ellipse dont l'indice de réfraction est égal à $\frac{1}{e}$, *vont converger au foyer le plus éloigné*, et *les rayons lumineux qui arrivent, parallèlement à l'axe réel, sur une branche d'hyperbole dont l'indice de réfraction est* $\frac{1}{e}$, *divergent après la réfraction, comme s'ils venaient du foyer de l'autre branche.*

On trouve quelques autres problèmes analogues sur les lignes géodésiques dans un Mémoire de M. Gilbert (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1860).

142. Dans la théorie des surfaces courbes on peut aussi tirer parti de l'équation (8), qui exprime une propriété générale des lignes géodésiques. Nous en donnerons un seul exemple, qui comporte également une application importante à l'optique.

Soient A, B deux surfaces données et cherchons une troisième surface X telle, que les normales s, s' abaissées d'un point quelconque P de cette surface sur A et B aient entre elles un rapport constant k.

Concevons que le point P se déplace sur la surface X

suivant une courbe quelconque σ, on aura toujours

$$\delta s = \cos\varphi\,\delta\sigma, \quad \delta s' = \cos\varphi'\,\delta\sigma,$$

φ et φ' désignant, comme ci-dessus, les angles que les prolongements de s et s' forment avec l'arc σ. De l'hypothèse admise

$$\frac{s}{s'} = k$$

on déduit d'ailleurs successivement

$$s - ks' = 0, \quad \delta s - k\,\delta s' = 0, \quad \frac{\delta s}{\delta s'} = k;$$

substituant les valeurs de δs, $\delta s'$, on aura donc

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = k.$$

Ainsi les deux droites s, s' forment avec une courbe quelconque σ, menée par le point P sur la surface X, des angles φ, φ' dont les cosinus sont entre eux dans le rapport constant k, d'où l'on conclut facilement que le plan de ces droites est normal à la surface X au point P. Supposons que l'arc σ soit pris dans ce même plan, les angles φ, φ' seront les compléments des angles que les droites s, s' font avec la normale à la surface X; donc le rapport des sinus de ces derniers angles sera aussi constant et égal à k. Concevons maintenant que la surface X se trouve entre deux milieux de pouvoirs réfringents inégaux et tels que l'indice de réfraction entre ces deux milieux soit k; si s est un rayon incident, s' sera le rayon réfracté. On en conclura que si les rayons incidents sont normaux à la surface A, les rayons réfractés seront tous normaux à la surface B. Cette même propriété appartiendra aux rayons réfléchis, pour lesquels on a $k = -1$.

Réciproquement, on pourrait se donner la surface réfringente X avec l'une des surfaces directrices, par exemple celle qui coupe orthogonalement ou à angle droit tous les rayons incidents et que nous avons désignée par A. On trouverait alors la surface B, normale à tous les rayons réfractés, par la condition $\frac{s}{s'} = k$, en cherchant l'enveloppe de toutes les sphères qui ont leurs centres sur la surface X, et dont les rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres à la surface A, le rapport constant entre les rayons et les distances étant celui du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui renferme toute la théorie des caustiques, développée successivement par MM. Dupin, Quetelet, Gergonne, et autres :

Deux milieux homogènes étant séparés l'un de l'autre par une surface de nature quelconque, et des rayons de lumière pénétrant de l'un de ces milieux dans l'autre, si les rayons incidents sont dirigés dans l'espace de manière à pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface, il en sera de même des rayons réfractés, et réciproquement : en outre, à chaque trajectoire orthogonale des rayons incidents répond toujours une surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés, telle que les normales abaissées sur ces deux surfaces d'un point quelconque de la surface séparatrice des deux milieux seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Problème XIII.

143. *Parmi toutes les lignes de même courbure constante qu'on peut mener entre deux points, quelle est la plus courte?*

Prenons l'arc s pour variable indépendante, les condi-

tions du problème seront

$$\int ds = \text{min.}, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{\rho^2} = \text{const.},$$

et la question reviendra à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \Big\{ 1 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu\left(x''^2 + y''^2 + z''^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) \Big\} ds,$$

ρ étant constant et λ, μ désignant deux fonctions indéterminées de s.

On a

$$V = 1 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu\left(x''^2 + y''^2 + z''^2 - \frac{1}{\rho^2}\right),$$

$$P = 0, \quad P_1 = 2\lambda x', \quad P_2 = 2\mu x'',$$

$$Q = 0, \quad Q_1 = 2\lambda y', \quad Q_2 = 2\mu y'',$$

$$R = 0, \quad R_1 = 2\lambda z', \quad R_2 = 2\mu z'',$$

et les équations générales de la courbe deviennent

$$P_1 - \frac{dP_2}{ds} = a, \quad Q_1 - \frac{dQ_2}{ds} = b, \quad R_1 - \frac{dR_2}{ds} = c,$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} 2\lambda x' - 2\mu' x'' - 2\mu x''' = a, \\ 2\lambda y' - 2\mu' y'' - 2\mu y''' = b, \\ 2\lambda z' - 2\mu' z'' - 2\mu z''' = c, \end{cases}$$

a, b, c étant des constantes arbitraires. A ces équations, il faut joindre les conditions primitives

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \rho = \text{const.}$$

L'élimination de λ entre les deux dernières équations (1) donne

$$bz' - cy' = 2\mu'(y'z'' - z'y'') + 2\mu(y'z''' - z'y'''),$$

et, en intégrant,

$$A + bz - cy = 2\mu(y'z'' - z'y'').$$

On trouve de même, en éliminant λ, soit entre la première et la troisième, soit entre les deux premières des équations (1),

$$B + cx - az = 2\mu(z'x'' - x'z''),$$
$$C + ay - bx = 2\mu(x'y'' - y'x''),$$

A, B, C étant de nouvelles constantes arbitraires. Enfin, si l'on multiplie par x', y', z', ou seulement par dx, dy, dz, les trois dernières équations, et qu'on les ajoute, μ disparaît et il vient

$$(2)\quad (A + bz - cy)dx + (B + cx - az)dy + (C + ay - bx)dz = 0,$$

équation différentielle qui, jointe à $\rho = \text{const.}$, détermine la courbe cherchée.

144. Ici se présente d'elle-même la question de savoir s'il existe une relation primitive entre x, y, z qui satisfasse généralement à l'équation différentielle (2), ou, en d'autres termes, si cette équation peut représenter une surface. Dans ce cas, la ligne cherchée serait une ligne de courbure constante tracée sur cette surface. Or, il est facile de s'assurer que l'équation (2) est intégrable sous la seule condition qu'on ait

$$(3)\qquad aA + bA + cC = 0,$$

et qu'elle conduit alors à l'équation d'un plan. En effet, si l'on regarde d'abord z comme constante, cette équation, devenue

$$\frac{dx}{B + cx - az} + \frac{dy}{A + bz - cy} = 0,$$

donne, par l'intégration,

$$\frac{B + cx - az}{A + bz - cy} = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction arbitraire de z. Pour déterminer cette fonction, différentions de nouveau en faisant varier toutes les variables x, y, z; le résultat, comparé à (2), fournit la condition

$$Aa + Bb + Cc + (A + bz - cy)^2\varphi'(z) = 0,$$

laquelle devant être identiquement vérifiée pour que l'équation (2) soit intégrable, se partage en deux autres

$$Aa + Bb + Cc = 0, \quad \varphi'(z) = 0.$$

Il en résulte

$$\varphi(z) = \text{const.} = m,$$

et, par conséquent,

$$B + cx - az = m(A + bz - cy),$$

équation d'un plan, comme nous l'avions annoncé. Lorsque les données du problème seront telles que la condition (3) soit remplie, on en conclura que la ligne cherchée est une courbe plane de courbure constante, c'est-à-dire un arc de cercle.

145. Pour faciliter la recherche des équations aux limites, désignons par ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' les valeurs de x, y, z, x', y', z' correspondantes à l'une ou à l'autre des extrémités de la courbe; les termes aux limites de la variation de l'intégrale S deviendront

$$\int_{s_1}^{s_2}\left(1 - ax' - by' - cz' - \frac{2\mu}{\rho^2}\right)\delta s$$

$$+ \int_{s_1}^{s_2}\left\{a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta + 2\mu(x''\delta\xi' + y''\delta\eta' + z''\delta\zeta')\right\}.$$

Nous savons déjà (n° 132) que le coefficient de δs doit se réduire à une constante; c'est ce qui résulte d'ailleurs des équations (1), car en les multipliant respectivement par x'', y'', z'' et observant que

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{\rho^2} = \text{const.},$$

$$x''x''' + y''y''' + z''z''' = 0,$$

on trouve

$$-\frac{2\mu'}{\rho^2} = ax'' + by'' + cz'',$$

et, en intégrant,

$$ax' + by' + cz' + \frac{2\mu}{\rho^2} = k,$$

k étant une constante arbitraire. Le terme en δs se réduit donc à $(1-k)\delta(s_2 - s_1)$ ou à $(1-k)\delta S$, puisque la différence $s_2 - s_1$ est égale à l'arc représenté précisément par l'intégrale S qu'il s'agit de rendre minimum. D'ailleurs, lorsqu'on aura déterminé x, y, z en fonctions de s de manière à vérifier les équations indéfinies (1), la variation δS se composera uniquement des termes aux limites que nous venons d'écrire. On aura donc, en transposant,

$$k\delta S = \Big|_{s_1}^{s_2} \left\{ a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta + 2\mu(x''\delta\xi' + y''\delta\eta' + z''\delta\zeta') \right\}.$$

Lorsque les directions des deux tangentes extrêmes à la courbe ne sont pas données, en sorte que les valeurs limites de x', y', z' sont assujetties à la seule condition $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, dont on a déjà tenu compte au moyen du facteur indéterminé λ, il est permis de regarder les variations $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ comme arbitraires et indépendantes les unes des autres, et d'égaler à zéro le

coefficient de chacune d'elles, ce qui donne pour chacune des limites

$$\mu x'' = 0, \quad \mu y'' = 0, \quad \mu z'' = 0.$$

Or x'', y'', z'' ne peuvent pas être nuls à la fois, parce qu'on aurait alors aux deux limites $\frac{1}{\rho} = 0$, valeur en général inadmissible à cause de la courbure constante imposée à priori à la courbe entière. On est donc forcé d'admettre $\mu = 0$ pour chacune des limites. Par conséquent, si l'on appelle x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux points extrêmes, qui d'ailleurs peuvent être fixes ou variables, on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A + bz_1 - cy_1 = 0, & A + bz_2 - cy_2 = 0, \\ B + cx_1 - az_1 = 0, & B + cx_2 - az_2 = 0, \\ C + ay_1 - bx_1 = 0, & C + ay_2 - bx_2 = 0. \end{array} \right.$$

Multipliant respectivement par a, b, c les trois équations soit du premier, soit du second système, il vient

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Nous avons déjà fait remarquer que c'est la condition d'intégrabilité de l'équation (2), qui conduit alors à une relation linéaire entre x, y, z. Il en résulte que la ligne cherchée est plane; cette ligne, qui a d'ailleurs une courbure constante, est donc un arc de cercle.

Les équations (4) donnent en outre

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c},$$

ce qui exprime que la corde, ou la droite qui joint les extrémités de la courbe, fait avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à a, b, c.

146. Supposons maintenant que l'on cherche la ligne de courbure constante la plus courte entre deux surfaces données. Les directions des tangentes extrêmes, ou les valeurs limites de x', y', z' n'étant pas fixes, il résulte d'abord de la discussion qui précède que la courbe est un arc de cercle. Pour déterminer de plus près sa position, considérons une des surfaces limites représentée par l'équation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

d'où l'on tire, en prenant la variation,

$$\frac{df}{d\xi}\delta\xi + \frac{df}{d\eta}\delta\eta + \frac{df}{d\zeta}\delta\zeta = 0.$$

Les termes aux limites fournissent d'ailleurs la condition

$$a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta = 0.$$

L'une de ces équations devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, qui satisfont à l'autre, il faut que les coefficients soient proportionnels entre eux, ou que l'on ait

$$\frac{\left(\frac{df}{d\xi}\right)}{a} = \frac{\left(\frac{df}{d\eta}\right)}{b} = \frac{\left(\frac{df}{d\zeta}\right)}{c}.$$

Or, dans ces trois fractions les numérateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale à la surface fait avec les axes des x, y, z, et les dénominateurs aux cosinus des angles que fait avec les mêmes axes la droite menée entre les extrémités de la courbe. Cette droite, ou la corde de l'arc de cercle, devra donc être normale à chacune des surfaces limites, de sorte qu'elle se confondra avec la plus courte distance entre ces surfaces.

Si le point limite (ξ, η, ζ) devait se trouver sur une courbe donnée, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ seraient nécessairement proportionnelles aux cosinus des angles que la tangente à cette courbe fait avec les axes des x, y, z, et l'équation

$$a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta = 0$$

prouverait alors que la corde doit être normale à la courbe limite.

DOUZIÈME LEÇON.

Suite de la recherche de courbes dans l'espace. — Courbe de longueur donnée renfermant l'aire maxima sur une surface. — Courbe de longueur donnée circonscrivant une portion de surface telle que le volume qu'elle recouvre est un maximum. — Courbe de longueur donnée, directrice d'un cylindre à aire maxima. — La brachistochrone sur une surface. — La brachistochrone dans un milieu résistant. — Position d'équilibre d'un fil sur une surface.

PROBLÈME XIV.

147. *Une courbe quelconque étant tracée sur une surface donnée, trouver sur la même surface une autre courbe de longueur déterminée qui renferme avec la première la plus grande aire possible.*

Soit $u = 0$ l'équation de la surface donnée, et p, q les dérivées partielles de z qu'on en déduit; l'aire qu'il faut rendre maximum aura pour expression

$$\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dydx.$$

Puisque z, p, q sont des fonctions connues de x, y, on pourra intégrer une fois par rapport à y entre des limites convenables, c'est-à-dire depuis la valeur de y qui correspond à la courbe donnée jusqu'à la valeur de y relative à la courbe que l'on cherche, et l'on aura ainsi un certain résultat

$$v = \int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy,$$

v étant une fonction connue des coordonnées x, y de la seconde courbe.

Cela posé, l'expression de l'aire devient $\int v\,dx$. Si l'on

prend l'arc s pour variable indépendante, les coordonnées x, y, z de la courbe seront des fonctions inconnues de s, liées entre elles par les équations

$$x'^2+y'^2+z'^2=1, \quad u=0;$$

et le problème reviendra à chercher le maximum de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2}\left\{vx'+\lambda(x'^2+y'^2+z'^2-1)+\mu u\right\}ds,$$

prise entre des limites dont la différence, s_2-s_1, est constante, λ, μ étant des fonctions indéterminées de s.

En conservant les notations de la leçon précédente, on a

$$V=vx'+\lambda(x'^2+y'^2+z'^2-1)+\mu u=vx',$$

$$P=\mu\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}x', \qquad P_1=2\lambda x'+v,$$

$$Q=\mu\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}x', \qquad Q_1=2\lambda y',$$

$$R=\mu\frac{du}{dz}, \qquad R_1=2\lambda z',$$

et les équations indéfinies deviennent

$$\frac{dv}{dx}x'+\mu\frac{du}{dx}-2\lambda'x'-2\lambda x''=\frac{dv}{ds}=\frac{dv}{dx}x'+\frac{dv}{dy}y',$$

$$\frac{dv}{dy}x'+\mu\frac{du}{dy}-2\lambda'y'-2\lambda y''=0,$$

$$\mu\frac{du}{dz}-2\lambda'z'-2\lambda z''=0.$$

Multipliées par x', y', z' et ajoutées, elles donnent d'abord

$$2\lambda'=0, \quad 2\lambda=c;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dv}{dy}=\sqrt{1+p^2+q^2};$$

les équations de la courbe se ramènent par conséquent à

$$(1)\quad\begin{cases} -\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,y' + \mu\dfrac{du}{dx} - cx'' = 0,\\ +\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,x' + \mu\dfrac{du}{dy} - cy'' = 0,\\ \mu\dfrac{du}{dz} - cz'' = 0. \end{cases}$$

Soient l, m, n les cosinus des angles de la droite L, qui serait à la fois tangente à la surface et normale à la courbe, au point x, y, z; on aura évidemment

$$l\frac{du}{dx} + m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz} = 0,$$

et les trois équations précédentes, multipliées respectivement par l, m, n donneront

$$(2)\quad \sqrt{1+p^2+q^2}\,(mx' - ly') = c\,(lx'' + my'' + nz'').$$

Or, la droite L, la tangente T à la courbe et la normale N à la surface étant perpendiculaires entre elles, et faisant avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont respectivement

$$l\,,\quad m\,,\quad n\,,$$
$$x',\quad y',\quad z'\,,$$
$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

si l'on prend L dans une direction telle que la succession des droites L, T, N soit directe, on aura

$$(mx' - ly')\sqrt{1+p^2+q^2} = 1.$$

En se rappelant d'ailleurs que $\rho x''$, $\rho y''$, $\rho z''$ représentent les cosinus des angles que le rayon ρ du cercle oscu-

lateur de la courbe fait avec les axes des coordonnées, ce rayon étant compté de la courbe vers le centre, et en désignant par θ l'angle aigu compris entre le rayon ρ et la normale à la surface, on verra le second membre de l'équation (2) se réduire à $\pm \frac{c}{\rho} \sin\theta$, le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que ρ fait un angle aigu ou obtus avec la droite L. L'équation dont il s'agit pourra donc s'écrire

$$1 = \pm \frac{c \sin\theta}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\theta}{\rho} = \text{const.}$$

Concevons une surface développable Σ tangente à la surface donnée suivant la courbe en question s; si la surface Σ vient à être redressée ou développée sur un plan, la courbe s se transformera en une courbe plane dont la courbure est précisément $\frac{\sin\theta}{\rho}$ (n° 135). Cette expression étant constante, la transformée de la courbe, qui sous un périmètre donné circonscrit l'aire maxima, sera un arc de cercle.

148. Cherchons maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les extrémités de la courbe. La courbe que l'on cherche devant aboutir à la courbe donnée, la fonction ν s'évanouit aux deux limites. Donc si l'on appelle indistinctement ξ, η, ζ les coordonnées de l'un ou de l'autre des points extrêmes, les termes aux limites de la variation de l'intégrale seront

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ (-P_1 x' - Q_1 y' - R_1 z')\,\delta s + P_1\,\delta\xi + Q_1\,\delta\eta + R_1\,\delta\zeta \right\}.$$

Le terme en δs, ramené à $-c\,\delta(s_2 - s_1)$, disparaît avec la variation $\delta(s_2 - s_1)$ qui est nulle, la différence $s_2 - s_1$, ou la longueur de l'arc, étant constante; et, en substituant les valeurs de P_1, Q_1, R_1, on verra les autres termes se

réduire à

$$c.\int_{s_1}^{s_2}(x'\,\delta\xi+y'\,\delta\eta+z'\,\delta\zeta).$$

Cette expression est identiquement nulle lorsque les points extrêmes de la courbe sont fixes; mais en admettant que ces points puissent se déplacer le long de la courbe donnée, on aura pour chacune des limites la condition

$$x'\,\delta\xi+y'\,\delta\eta+z'\,\delta\zeta=0,$$

exprimant, comme il est facile de le reconnaître, que les derniers éléments de la ligne cherchée doivent être normaux à cette courbe.

Parmi toutes les lignes de longueur donnée tracées sur la surface d'une sphère, celle qui renferme avec une courbe donnée la plus grande aire possible, est donc un arc de cercle, normal à cette courbe à ses deux extrémités. Si la seconde courbe est elle-même un grand cercle, la ligne demandée sera une demi-circonférence.

Problème XV.

149. *Une courbe étant donnée sur une surface quelconque, trouver sur la même surface une autre courbe de longueur donnée, et telle que la portion de la surface circonscrite par les deux courbes recouvre le plus grand volume possible.*

Soit $u=0$ l'équation de la surface donnée, et considérons la portion de cette surface circonscrite par les deux courbes en question. Le volume du cylindre compris entre cette portion de surface et sa projection orthogonale sur le plan xy s'exprime par l'intégrale double $\int\int z\,dy\,dx$, dans laquelle, en vertu de l'équation $u=0$, z est une fonction connue de x, y. Admettons qu'on intègre d'abord par rapport à y, en regardant x comme

constante, et posons

$$v = \int z\,dy,$$

l'intégrale étant prise entre les valeurs de y correspondantes aux deux courbes, v sera une certaine fonction des coordonnées x, y de la courbe cherchée, et l'expression du volume deviendra $\int v\,dx$, ou $\int v x' ds$, en prenant l'arc s pour variable indépendante. Cela posé, le problème reviendra à chercher le maximum de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ v x' + \lambda\,(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u \right\} ds,$$

la différence $s_2 - s_1$ des limites étant constante, et λ, μ représentant deux fonctions indéterminées de s.

On trouve d'abord, comme dans le problème précédent, les équations indéfinies

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dv}{dx}x' + \mu\frac{du}{dx} - 2\lambda' x' - 2\lambda x'' = \frac{dv}{ds}, \\ &\frac{dv}{dy}x' + \mu\frac{du}{dy} - 2\lambda' y' - 2\lambda y'' = 0, \\ &\mu\frac{du}{dz} - 2\lambda' z' - 2\lambda z'' = 0. \end{aligned} \right.$$

Multipliant par x', y', z' et observant que

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dx}x' + \frac{dv}{dy}y',$$

on en tire

$$2\lambda' = 0, \quad 2\lambda = c;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dv}{dy} = z;$$

les équations (1) deviennent par conséquent

$$(2)\quad \begin{cases} -zy' + \mu \dfrac{du}{dx} - cx'' = 0, \\ +zx' + \mu \dfrac{du}{dy} - cy'' = 0, \\ \mu \dfrac{du}{dz} - cz'' = 0. \end{cases}$$

Multipliées respectivement par les cosinus l, m, n de la droite L qui serait à la fois tangente à la surface et normale à la courbe, elles donnent

$$z(mx' - ly') = c(lx'' + my'' + nz'').$$

En appelant p, q les dérivées partielles de z, tirées de l'équation de la surface $u = 0$, et θ l'angle aigu compris entre le rayon de courbure ρ de la courbe cherchée et la normale à la surface, il est facile de voir, comme dans le Problème XIV, que

$$mx' - ly' = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad lx'' + my'' + nz'' = \pm \frac{\sin\theta}{\rho}.$$

La ligne cherchée sera donc caractérisée par l'équation

$$\frac{z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \pm c \frac{\sin\theta}{\rho},$$

ou

$$\frac{\rho}{\sin\theta} \cdot \frac{z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \text{const.}$$

Lorsque les points extrêmes de cette ligne ne sont pas fixes, mais seulement assujettis à rester sur la courbe donnée, l'équation

$$x'\,\delta\xi + y'\,\delta\eta + z'\,\delta\zeta = 0,$$

fournie par les termes aux limites de la variation de l'in-

tégrale, nous apprend que les deux courbes doivent se couper sous un angle droit.

Problème XVI.

150. *Étant donnés deux plans parallèles et un point A dans l'un d'eux, on se propose de mener de ce point à l'autre plan une ligne de longueur donnée, telle que l'aire de la surface cylindrique ayant cette ligne pour directrice, et pour génératrices des perpendiculaires terminées aux deux plans, soit maximum.*

Prenons le plan renfermant le point donné pour plan des xy, et pour axe des z la perpendiculaire élevée au point A : soit h la distance des deux plans ou l'ordonnée de l'extrémité B de la ligne cherchée AB. Puisque la hauteur h de la surface cylindrique est constante, l'aire de cette surface aura pour expression $h\int\sqrt{dx^2+dy^2}$; si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, il s'agira donc de trouver le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2}\left\{\sqrt{x'^2+y'^2}+\lambda\,(x'^2+y'^2+z'^2-1)\right\}ds,$$

λ étant une fonction indéterminée de s.

Ce problème présente une particularité à laquelle il faut bien faire attention pour ne pas introduire des équations inutiles et étrangères à la question. En effet, x' et y' n'entrent dans le problème que par la combinaison $x'^2+y'^2$, en sorte qu'elles ne constituent effectivement qu'une seule fonction à déterminer; rien dans les données du problème ne les distinguant l'une de l'autre, elles ne doivent donc pas être non plus séparées dans le calcul. La conséquence est qu'il est inutile et même illicite de faire varier séparément x' et y' : inutile parce que les conditions du problème ne le de-

mandent pas, illicite parce qu'en établissant une variabilité hors de propos, on pourrait faire perdre à la vraie solution du problème son caractère de maximum.

En appelant σ la projection de l'arc s sur le plan xy, on aura

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \text{ou} \quad \sigma' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

et l'intégrale qu'il faut rendre maximum deviendra

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \sigma' + \lambda (\sigma'^2 + z'^2 - 1) \right\} ds.$$

Au lieu de x, y, z elle ne renferme plus que deux fonctions, σ, z à déterminer, ainsi que cela doit être.

La condition de maximum fournit les équations générales

(1) $$\begin{cases} 1 + 2\lambda\sigma' = a, \\ 2\lambda z' = b, \end{cases}$$

a et b étant deux constantes arbitraires, et, pour la seconde limite de la courbe restée indéterminée, l'équation particulière

(2) $$\Big|^{s_2} (1 + 2\lambda\sigma') = 0.$$

Celle-ci donne $a = 0$, et par suite

$$2\lambda\sigma' = -1,$$
$$2\lambda z' = b,$$

d'où l'on tire

$$\frac{z'}{\sigma'} + b = 0, \quad dz + b\,d\sigma = 0,$$

et en intégrant

$$z + b\sigma + c = 0.$$

Si l'on compte l'arc σ à partir du point A, σ devra s'éva-

nouir en même temps que z, la constante c sera nulle, et l'on aura simplement

$$z + b\sigma = 0.$$

Telle est l'équation de la ligne cherchée. Elle exprime que si l'on développe la surface cylindrique sur laquelle la courbe est tracée, celle-ci se transformera en une droite; la ligne cherchée est donc une *hélice*. Quant à sa projection sur le plan xy ou à la forme de la surface cylindrique, elle reste indéterminée, ainsi que cela doit être.

Si l'extrémité B était fixée, aussi bien que le point initial A, rien ne serait changé au calcul précédent; la ligne serait donc encore dans ce cas une hélice.

M. Vieille a fait remarquer (*Cours d'Analyse et de Mécanique rationnelle*, Paris, 1851) que dans le second cas, ou lorsque les points A, B sont fixes, le calcul des variations ne donne plus cette solution, quand on fait varier séparément les coordonnées x et y; et il en attribue la cause à un défaut de la règle d'Euler pour les maxima relatifs. Il nous semble cependant qu'il n'y a point là d'anomalie, et que si le maximum n'est plus indiqué par le calcul, c'est parce qu'il cesse véritablement d'avoir lieu, du moins dans le sens analytique, aucune relation déterminée entre x et y n'ayant, plutôt qu'une autre, le vrai caractère de maximum.

Problème XVII.

151. *Trouver la courbe de plus vite descente sur une surface donnée.*

Considérons un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée et sollicitée par des forces quelconques. Soit R la résultante de ces forces, X, Y, Z les composantes de R suivant les axes des coordonnées et v la vi-

tesse, on aura

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{X}\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}\frac{dy}{ds} + \mathrm{Z}\frac{dz}{ds},$$

et par suite

$$v\,dv = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz.$$

Les forces X, Y, Z seront en général des fonctions des coordonnées x, y, z du mobile; admettons que par la nature de ces forces $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ soit une différentielle exacte, l'équation précédente pourra s'intégrer immédiatement, et conduira à un résultat de la forme

$$v^2 = 2\int(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \mathrm{F}(x, y, z) - \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1) + c^2,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées du point de départ, pour lequel nous supposons la vitesse donnée et égale à c.

Dans l'hypothèse que nous venons d'admettre sur la nature des forces qui agissent sur le point mobile, la vitesse v sera donc fonction des seules coordonnées x, y, z du point occupé actuellement par le mobile, et ne dépendra nullement du chemin qu'il a pu suivre pour y arriver. Le temps, exprimé par l'intégrale $\int\frac{ds}{v}$, pendant lequel le mobile descend d'un point A à un autre point B, sera, au contraire, différent selon les différents chemins qu'on l'oblige de prendre, et il sera minimum pour un certain chemin ou trajectoire qu'il s'agit de déterminer. Cela posé, si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, et qu'on représente par $u = 0$ l'équation de la surface donnée, les conditions du problème seront

$$\int\frac{ds}{v} = \text{min.},\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,\quad u = 0,$$

et la question reviendra à chercher le minimum absolu de

l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{\rho} + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u \right\} ds,$$

λ, μ étant des fonctions indéterminées de s.

On a

$$V = \frac{1}{\rho} + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u = \frac{1}{\rho},$$

$$P = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dx} + \mu\frac{du}{dx}, \qquad P_1 = 2\lambda x',$$

$$Q = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dy} + \mu\frac{du}{dy}, \qquad Q_1 = 2\lambda y',$$

$$R = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dz} + \mu\frac{du}{dz}, \qquad R_1 = 2\lambda z',$$

et les équations indéfinies deviennent

$$(1) \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{dx} + \mu\dfrac{du}{dx} - 2\lambda' x' - 2\lambda x'' = 0, \\ -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{dy} + \mu\dfrac{du}{dy} - 2\lambda' y' - 2\lambda y'' = 0, \\ -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{dz} + \mu\dfrac{du}{dz} - 2\lambda' z' - 2\lambda z'' = 0. \end{cases}$$

Multipliées respectivement par x', y', z' et ajoutées, elles donnent

$$\frac{\rho'}{\rho^2} + 2\lambda' = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\rho} - 2\lambda = k.$$

En examinant les termes aux limites, on verrait que la constante k est nécessairement nulle, en sorte qu'on a simplement

$$2\lambda = \frac{1}{\rho}.$$

Concevons que par le point x, y, z on mène dans le plan tangent à la surface une droite L normale à la courbe cherchée et faisant un angle aigu φ avec le rayon de courbure ρ de cette courbe; désignons par l, m, n les cosinus des angles que cette droite L fait avec les axes des x, y, z; nous trouverons, en multipliant respectivement par l, m, n les équations (1), et ajoutant,

$$-\frac{1}{v^2}\left(l\frac{dv}{dx}+m\frac{dv}{dy}+n\frac{dv}{dz}\right)-\frac{2\lambda}{\rho}\cos\varphi=0.$$

Mettons pour 2λ la valeur que nous venons de trouver, et rappelons-nous que

$$v\frac{dv}{dx}=X,\quad v\frac{dv}{dy}=Y,\quad v\frac{dv}{dz}=Z,$$

il viendra

$$(2)\qquad \frac{1}{v^2}(lX+mY+nZ)+\frac{1}{\rho}\cos\varphi=0.$$

Enfin, si l'on appelle ψ l'angle compris entre la résultante R et la droite L, cette équation s'écrira plus simplement

$$-\frac{v^2}{\rho}\cos\varphi=R\cos\psi.$$

Or, on sait que la force centrifuge est égale à $\frac{v^2}{\rho}$ et que sa direction est opposée à celle du rayon de courbure ρ. Ainsi le premier membre représente la force centrifuge estimée suivant la droite L, tandis que le second membre exprime la force R estimée suivant la même direction. Ces deux composantes étant égales, on en conclura que la pression exercée dans la direction latérale L par le mobile sur sa trajectoire, lorsque cette trajectoire est une brachistochrone, est le double de celle qui aurait lieu en

vertu de la seule force R, si la vitesse v était nulle, c'est-à-dire si le point matériel était en repos; en d'autres termes : *la force centrifuge vient s'ajouter aux forces réelles de manière à produire une pression latérale double.* C'est la propriété la plus générale de la ligne de plus vite descente sur une surface quelconque.

152. Dans le cas particulier où le mobile est soumis à la seule action de la pesanteur, on a, en faisant coïncider l'axe des z avec la direction de la pesanteur, et en désignant par g l'accélération dans la chute libre,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$
$$v^2 = 2\int g dz = 2g(z - h);$$

l'équation (2) devient alors

$$\rho = \frac{2(z - h)\cos\varphi}{n}.$$

Si l'on prolonge la droite L, qui est à la fois tangente à la surface et normale à la courbe, jusqu'à ce qu'elle rencontre un certain plan horizontal dont l'équation est $z = h$, et qui passerait par le point de départ du mobile si la vitesse initiale était nulle, cette droite ou normale aura pour expression $\frac{z - h}{n}$; la dernière équation exprime donc que le rayon de courbure de la brachistochrone est le double de la projection de la normale ainsi déterminée sur le plan osculateur de la courbe.

153. Revenons au cas général, où les forces X, Y, Z sont assujetties à la seule condition que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit une différentielle exacte, et supposons que le mobile soit entièrement libre, en sorte que le chemin qu'on lui fait suivre puisse être choisi parmi toutes les courbes dans l'espace menées entre les mêmes points extrêmes, la condition $u = 0$ n'ayant plus lieu, le facteur μ sera nul; on

aura d'ailleurs, comme auparavant,

$$2\lambda = \frac{1}{v};$$

les équations (1) deviendront, par conséquent,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - v'x' + vx'' = 0,\\ \dfrac{dv}{dy} - v'y' + vy'' = 0,\\ \dfrac{dv}{dz} - v'z' + vz'' = 0. \end{cases}$$

En désignant, pour un moment, par α, β, γ les angles que la normale au plan osculateur de la courbe fait avec les axes des x, y, z, et multipliant respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ces dernières équations, on trouve

$$\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma = 0,$$

ou

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0;$$

et l'on en conclura que la résultante R est perpendiculaire à la direction déterminée par les angles α, β, γ, c'est-à-dire que le plan osculateur de la courbe contient la résultante.

D'ailleurs, si l'on appelle ω l'angle compris entre la résultante R et le rayon de courbure ρ, les mêmes équations (3), multipliées respectivement par x'', y'', z'', donnent

$$(4)\qquad -\frac{v^2}{\rho} = R\cos\omega,$$

et l'on en conclut : 1° que l'angle ω est $>90°$, en sorte que le rayon de courbure ρ est directement opposé à la projection de la résultante sur le plan normal à la courbe;

2° que la pression totale exercée par le mobile sur sa trajectoire est double de celle qui aurait lieu si la vitesse était nulle.

154. Considérons maintenant le cas plus particulier où le mobile est sollicité par une seule force centrale. En prenant le centre de la force pour origine des coordonnées, on a

$$v\frac{dv}{dx} = X = R\frac{x}{r},$$

$$v\frac{dv}{dy} = Y = R\frac{y}{r},$$

$$v\frac{dv}{dz} = Z = R\frac{z}{r},$$

r étant le rayon vecteur ou la distance du mobile au centre; et les équations (3) deviennent

$$\frac{Rx}{vr} - v'x' + vx'' = 0,$$

$$\frac{Ry}{vr} - v'y' + vy'' = 0,$$

$$\frac{Rz}{vr} - v'z' + vz'' = 0.$$

En éliminant R entre les deux dernières, on trouve

$$-v'(yz' - zy') + v(yz'' - zy'') = 0;$$

on obtiendra des résultats analogues, en éliminant R entre la première et la troisième ou entre les deux premières équations, et l'on aura ensuite, en intégrant,

$$yz' - zy' = av,$$

$$zx' - xz' = bv,$$

$$xy' - yx' = cv,$$

a, b, c étant des constantes arbitraires. Ces trois équa-

tions multipliées respectivement par x, y, z donnent

$$ax + by + cz = 0,$$

équation d'un plan passant par le centre. Il en résulte que la ligne de plus vite descente est une courbe plane; elle est d'ailleurs caractérisée par l'équation (4).

Lorsque le point mobile est sollicité uniquement par la pesanteur, on a

$$R = g, \quad v^2 = 2g(z - h);$$

l'équation (4), devenue

$$\rho = -2(z - h)\,\text{séc}\,\omega,$$

exprime alors que le rayon de courbure est le double de la normale prolongée jusqu'à la rencontre du plan $z = h$, propriété bien connue de la cycloïde.

Problème XVIII.

155. *Trouver la courbe de plus vite descente dans un milieu résistant homogène.*

Nous admettons comme évident que la courbe doit être comprise dans un plan vertical, et nous désignons les coordonnées d'un point quelconque de la courbe par x, y, en faisant coïncider l'axe des y avec la direction de la pesanteur; nous prenons d'ailleurs, comme auparavant, l'arc s pour variable indépendante. Cela posé, soit v la vitesse, g l'accélération dans la chute libre, $\varphi(v)$ la résistance, qui doit être une certaine fonction de la vitesse; l'équation du mouvement sera

$$gy' - \varphi(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = vv',$$

et le temps aura pour expression $\int \frac{ds}{v}$. En regardant x,

y, v comme trois fonctions de s qu'il s'agit de déterminer, on aura donc entre ces fonctions les deux relations

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad vv' + \varphi(v) - gy' = 0,$$

et le problème reviendra à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{v} + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) + \mu[vv' + \varphi(v) - gy'] \right\} ds.$$

Si dans les formules générales du n° 131 on remplace z par v, on aura

$$V = \frac{1}{v} + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) + \mu[vv' + \varphi(v) - gy'] = \frac{1}{v},$$

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = -\frac{1}{v^2} + \mu v' + \mu\varphi'(v);$$

$$P_1 = 2\lambda x', \quad Q_1 = 2\lambda y' - \mu g, \quad R_1 = \mu v,$$

et la règle de minimum conduira aux équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\lambda' x' + 2\lambda x'' &= 0, \\ -g\mu' + 2\lambda' y' + 2\lambda y'' &= 0, \\ -\frac{1}{v^2} - \mu' v + \mu\varphi'(v) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Multipliant les deux premières par x', y' et substituant à gy' sa valeur $vv' + \varphi(v)$, il vient

$$2\lambda' - \mu'[vv' + \varphi(v)] = 0.$$

La troisième équation multipliée par v' se transforme en

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{ds} - \mu' vv' + \mu \frac{d\varphi(v)}{ds} = 0;$$

retranchant celle-ci de la précédente, on trouve

$$o = 2\lambda' - \mu'\varphi(v) - \mu\frac{d\varphi(v)}{ds} - \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{ds}$$

$$= 2\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d.\mu\varphi(v)}{ds} - \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{ds},$$

et, en intégrant,

$$2\lambda - \mu\varphi(v) - \frac{1}{v} = k.$$

La considération des termes aux limites de la variation de l'intégrale proposée fera voir que la constante k est nécessairement nulle, en sorte que cette équation devient simplement

$$(2) \qquad 2\lambda - \mu\varphi(v) - \frac{1}{v} = o.$$

On trouve d'ailleurs, en intégrant les deux premières équations (1),

$$(3) \qquad \begin{cases} 2\lambda x' = a, \\ -g\mu + 2\lambda y' = b, \end{cases}$$

a, b étant deux constantes arbitraires. Ajoutant les deux relations primitives

$$(4) \qquad \begin{cases} vv' + \varphi(v) - gy' = o, \\ x'^2 + y'^2 = 1, \end{cases}$$

nous aurons cinq équations (2), (3), (4) entre lesquelles nous pourrons éliminer les quatre inconnues λ, μ, x', y'. Ce calcul effectué donne

$$\left(1 - \frac{bv\varphi(v)}{g}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{vv' + \varphi(v)}{g}\right)^2\right\} = a^2v^2\left\{1 - \frac{vv'\varphi(v) + \varphi(v)^2}{g^2}\right\}^2,$$

équation qui déterminera v en fonction de s, aussitôt que la forme de la fonction $\varphi(v)$ ou la loi de la résistance sera connue. Reportant la valeur de v ainsi obtenue dans l'équation

$$vv' + \varphi(v) - gy' = 0,$$

on en déduira ensuite une équation entre y et s qui sera l'équation de la courbe cherchée.

156. Lorsque la résistance $\varphi(v)$ est nulle, les deux dernières formules se réduisent à

$$1 - \frac{v^2 v'^2}{g^2} = a^2 v^2, \quad vv' - gy' = 0,$$

dont la seconde s'intègre immédiatement et donne

$$v^2 = 2g(y - c).$$

Substituant dans la première équation la valeur de vv' fournie par la seconde, on trouve d'ailleurs

$$a^2 v^2 = 1 - y'^2;$$

enfin, quand on élimine v^2 entre cette équation et la précédente, il vient

$$\frac{dy}{ds} = \pm\sqrt{1 - 2a^2 g(y - c)},$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{dx}{ds} = \pm\sqrt{2a^2 g(y - c)},$$

$$dx = \pm dy\sqrt{\frac{2a^2 g(y - c)}{1 - 2a^2 g(y - c)}},$$

résultat dans lequel il est facile de reconnaître l'équation différentielle de la cycloïde.

157. Cherchons maintenant quelles sont, dans le cas

général, les équations aux limites auxquelles doivent satisfaire les extrémités de la courbe. En désignant par ξ, η, ν les valeurs de x, y, v correspondantes à l'une ou à l'autre des extrémités, on verra les termes aux limites de la variation de l'intégrale se réduire à

$$-k\delta(s_2-s_1)+\int_{s_1}^{s_2}(a\delta\xi+b\delta\eta+\mu v\delta\nu).$$

La variation de l'arc $s_2 - s_1$ étant arbitraire, ces termes égalés à zéro fournissent d'abord la condition $k=0$, déjà admise par anticipation.

Ayant tenu compte, au moyen du facteur μ, de la relation qui existe en un point quelconque entre la vitesse v et les coordonnées x, y, nous sommes dès à présent autorisé à regarder la variation $\delta\nu$ comme arbitraire et indépendante des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$. Donc, si l'on suppose que la vitesse soit donnée au point de départ A, mais qu'elle ne le soit pas au point d'arrivée B, on devra rendre nul le coefficient μ de $\delta\nu$ à la seconde limite; dès lors les équations (3), donnant pour cette même limite

$$\frac{x'}{a}=\frac{y'}{b},$$

montrent qu'au point B la tangente à la brachistochrone fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont dans le rapport de a à b.

Lorsque les points extrêmes A, B ne sont pas fixes, mais seulement assujettis à rester sur deux courbes données, l'équation

$$a\,\delta\xi+b\,\delta\eta=0,$$

qui doit subsister aux deux limites, montre que la tangente à chacune des courbes limites aux points A, B est

normale à la direction déterminée par des cosinus proportionnels à a, b.

On en conclura sans peine que si l'on cherche entre deux courbes données la ligne de plus vite descente dans un milieu homogène, résistant suivant une loi quelconque, ces deux courbes doivent avoir leurs tangentes parallèles aux points de départ et d'arrivée du mobile, et que le mobile doit rencontrer la seconde courbe sous un angle droit, quelle que soit d'ailleurs sa vitesse initiale.

Ce résultat est identique avec celui que nous avions déjà trouvé pour la brachistochrone dans le vide (Probl. VII).

Problème XIX.

158. *Trouver la position que doit prendre un fil flexible et inextensible sur une surface donnée, pour que son centre de gravité soit le plus bas possible.* — On sait que dans cette position le fil sera en équilibre.

Supposons que l'axe des z coïncide avec la direction de la pesanteur, l'ordonnée verticale du centre de gravité du fil sera

$$\frac{\int z ds}{\int ds}.$$

C'est l'expression qu'il faut rendre maximum sous la condition que $\int ds$ ou la longueur du fil reste constante, et que les coordonnées x, y, z satisfassent d'ailleurs à l'équation de la surface donnée, $u = 0$, ainsi qu'à la relation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Le problème revient donc à chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \left\{ z + \lambda (x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u \right\} ds,$$

la différence $s_2 - s_1$ des limites, ou la longueur de la courbe, étant constante, et λ, μ désignant deux fonctions indéterminées de s.

On a

$$V = z + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu u,$$

$$P = \mu\frac{du}{dx},\quad Q = \mu\frac{du}{dy},\quad R = 1 + \mu\frac{du}{dz},$$

$$P_1 = 2\lambda x',\quad Q_1 = 2\lambda y',\quad R_1 = 2\lambda z',$$

et les équations indéfinies deviennent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{du}{dx} - 2\lambda' x' - 2\lambda x'' &= 0,\\ \mu\frac{du}{dy} - 2\lambda' y' - 2\lambda y'' &= 0,\\ 1 + \mu\frac{du}{dz} - 2\lambda' z' - 2\lambda z'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Multipliées par x', y', z', elles donnent

$$z' - 2\lambda' = 0,\quad 2\lambda = z - c.$$

Soient l, m, n les cosinus des angles de la droite L qui tangente à la fois à la surface et normale à la courbe ferait un angle aigu avec le rayon de courbure ρ; si l'on multiplie respectivement par l, m, n les mêmes équations (1), il vient

$$n - 2\lambda(lx'' + my'' + nz'') = 0,$$

ou bien

$$\rho = \frac{(z-c)}{n}\sin\theta,$$

θ étant l'angle aigu compris entre le rayon de courbure ρ du fil et la normale à la surface. Pour interpréter cette formule, nous ferons observer que $\frac{z-c}{n}$ est la normale à la courbe menée dans le plan tangent à la surface et prolongée jusqu'à un certain plan horizontal dont l'équation est $z = c$. Donc *le rayon de courbure ρ est égal à la projection de la normale ainsi déterminée sur le plan osculateur de la courbe,* propriété analogue à celle de

la chaînette. Si l'on appelle L la longueur de la normale dont il s'agit, il viendra

$$\frac{\rho}{L} = \sin\theta;$$

on a d'ailleurs, d'après le théorème de Meunier,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \cos\theta,$$

ρ_0 étant le rayon de courbure de la section normale passant par la tangente à la courbe. Il en résulte

$$\tang\theta = \frac{\rho_0}{L},$$

$$\rho = \frac{L\rho_0}{\sqrt{L^2 + \rho_0^2}},$$

formules qui serviront à calculer la grandeur et la direction du rayon de courbure ρ, lorsque la direction de la tangente sera donnée.

159. En appelant ξ, η, ζ les coordonnées de l'une ou de l'autre des extrémités du fil, on verra les termes aux limites de la variation de l'intégrale proposée se réduire à

$$c\delta(s_2 - s_1) + \int_{s_1}^{s_2} (z - c)(x'\delta\xi + y'\delta\eta + z'\delta\zeta).$$

La différence $s_2 - s_1$, ou la longueur de la courbe, étant constante, le terme $c\delta(s_2 - s_1)$ est identiquement nul; quant aux autres termes, ils fournissent pour chacune des limites la condition

$$x'\delta\xi + y'\delta\eta + z'\delta\zeta = 0,$$

exprimant que si les points extrêmes du fil, au lieu d'être fixes, peuvent glisser le long de deux courbes données, le fil se placera de manière à avoir ses extrémités normales à ces courbes limites.

TREIZIÈME LEÇON.

Applications à des intégrales doubles. — Maximum ou minimum de l'intégrale $\int\int(z-px-qy)^m dydx$. — Maximum ou minimum de $\int\int\sqrt{p^2+q^2}\,dydx$. — Maximum ou minimum de $\int\int(z-px-qy)\,dydx$, l'intégrale $\int\int\sqrt{p^2+q^2}\,dydx$ étant constante. — Surface à aire minimum. — Surface dont le centre de gravité est le plus bas possible. — Surface renfermant un volume donné et dont le centre de gravité est le plus bas possible. — Surface à aire minimum recouvrant un volume donné.

---

160. Dans cette nouvelle leçon nous avons à donner quelques exemples de la recherche des maxima et minima des intégrales doubles. Les règles et formules générales relatives à ce cas ayant été exposées avec détail dans la VIIe leçon, nous n'avons pas à y revenir, d'autant plus que nous conserverons avec soin les notations adoptées.

Problème XX.

Trouver une surface telle, que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} v^m\,dydx$$

soit maximum ou minimum, v étant la portion de l'axe des z comprise entre l'origine et le plan tangent à la surface au point x, y, z.

On a

$$v = z - px - qy, \quad V = v^m = (z - px - qy)^m,$$
$$N = mv^{m-1}, \quad P = -mv^{m-1}x, \quad Q = -mv^{m-1}y;$$

l'équation indéfinie $N - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0$ devient par conséquent

$$v^{m-2}\left(\frac{3}{m-1}v + x\frac{dv}{dx} + y\frac{dv}{dy}\right) = 0,$$

$\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ étant les dérivées partielles de v considéré comme fonction immédiate de x, y. Cette équation est satisfaite, 1° si l'on fait $v = 0$, valeur qui rendrait l'intégrale nulle et donnerait pour solution une surface conique ayant son centre à l'origine des coordonnées; 2° si l'on fait

$$(1) \qquad \frac{3}{m-1}v + x\frac{dv}{dx} + y\frac{dv}{dy} = 0;$$

nous ne nous occuperons que de cette seconde solution.

L'équation (1) aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à v s'intègre facilement par la méthode ordinaire et donne

$$v = x^{\frac{3}{1-m}} F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou

$$z - x^{\frac{3}{1-m}} F\left(\frac{y}{x}\right) = px + qy,$$

F étant une fonction arbitraire. C'est encore une équation aux dérivées partielles du premier ordre relativement à z; en l'intégrant, et faisant, pour abréger,

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{m-1}{m+2} F\left(\frac{y}{x}\right),$$

on aura

$$(2) \qquad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{\frac{3}{1-m}} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (1). Elle représente une infinité de surfaces distinctes, suivant les formes assignées aux fonctions arbitraires φ et ψ.

161. Lorsque les limites de l'intégrale sont fixes, ainsi que les valeurs correspondantes de z, ou lorsque la surface doit être circonscrite par un contour donné, la règle de maximum ne fournit point d'équations aux limites, et les fonctions arbitraires seront déterminées par la condition même que la surface passe par ce contour. Mais si l'on donne seulement les valeurs limites de x, y, ou la projection du contour sur le plan xy, sans les valeurs correspondantes de z, la condition de maximum ou de minimum exige qu'en chaque point du contour on ait

$$Q\,dx - P\,dy = 0$$

ou

$$v^{m-1}(y\,dx - x\,dy) = 0. \tag{3}$$

Le facteur $ydx - xdy$ ne peut être nul que lorsque la projection du contour est une droite passant par l'origine des coordonnées; pour toute portion du contour qui ne remplit pas cette condition, on aura donc $v = 0$, et par suite

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

ajoutons que sur cette partie du contour le rapport $\frac{y}{x}$ varie nécessairement d'un point à l'autre, et nous en conclurons que la fonction ψ est nulle en général ou pour chaque point de la surface. L'équation (2) réduite à

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

représente alors une surface conique ayant son sommet

à l'origine des coo rdonnées. La valeur de v qu'on en déduit étant constamment nulle, celle de l'intégrale est aussi nulle, et l'on comprend sans démonstration que c'est un vrai minimum, du moins lorsque l'exposant m est un nombre pair et positif.

162. Considérons maintenant le cas où le contour n'est pas donné, mais seulement assujetti à rester sur deux ou plusieurs surfaces données; soient p', q' les dérivées partielles de z relatives à l'une de ces surfaces, on aura pour la portion du contour quelle doit renfermer

$$V + P(p' - p) + Q(q' - q) = 0,$$

ou

$$v^{m-1} \{ v + mx(p - p') + my(q - q') \} = 0,$$

équation qui sera satisfaite, soit par

$$v = 0,$$

soit par

$$\frac{z - px - qy}{z - p'x - q'y} = \frac{m}{m - 1}.$$

La première solution $v = 0$ ramène la surface conique du cas précédent; la seconde exprime que si l'on mène des plans tangents à la surface cherchée et à la surface terminale par un point quelconque de leur ligne d'intersection, les portions de l'axe des z comprises entre l'origine et ces deux plans seront entre elles dans le rapport constant $\frac{m}{m-1}$.

163. Dans ce qui précède, nous avons admis implicitement que l'exposant m était plus grand que l'unité. Au lieu de nous arrêter à discuter le cas de $m = 1$ ou $m < 1$, considérons le problème plus général où l'on cherche le

maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(v).dy\,dx,$$

dans laquelle

$$v = z - px - qy.$$

Nous avons

$$V = f(v),\quad N = f'(v),\quad P = -xf'(v),\quad Q = -yf'(v).$$

L'équation indéfinie

$$3f'(v) + x\frac{d.f'(v)}{dx} + y\frac{d.f'(v)}{dy} = 0,$$

équation aux dérivées partielles du premier ordre, lorsqu'on y regarde $f'(v)$ comme fonction immédiate de x, y, s'intègre sans peine par la méthode ordinaire et donne

$$x^3 f'(v) = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

F étant une fonction arbitraire.

Soit, par exemple,

$$f(v) = \log v,$$

on aura

$$f'(v) = \frac{1}{v},\quad \frac{x^3}{v} = F\left(\frac{y}{x}\right),\quad v = x^3 F_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

et

$$z - x^3 F_1\left(\frac{y}{x}\right) = px + qy.$$

En intégrant de nouveau, il vient

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^3\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Problème XXI.

164. *Trouver la surface pour laquelle l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{p^2+q^2}\,.\,dydx$$

soit un maximum ou un minimum, p et q étant les dérivées partielles de l'ordonnée z de la surface.

On a

$$V=\sqrt{p^2+q^2},\quad N=0,\quad P=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad Q=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

l'équation indéfinie est

$$q^2r-2pqs+p^2t=0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(1)\qquad y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Lorsque les limites de l'intégrale sont déterminées, ou quand on connaît les deux parois cylindriques $y=y_1$, $y=y_2$, et les deux plans $x=x_1$, $x=x_2$ qui doivent circonscrire la surface cherchée, sans que son contour dans l'espace soit donné, on doit avoir en chaque point du contour

$$Q\,dx-P\,dy=0,\quad \text{ou}\quad q\,dx-p\,dy=0,$$

équation qui exprime que la surface cherchée doit rencontrer sous un angle droit les deux parois cylindriques, ainsi que les deux plans limites. Dans le cas plus général où le contour est assujetti à rester sur des surfaces données quelconques, si l'on appelle p', q' les dérivées partielles de z relatives à chacune de ces surfaces, on devra avoir en chaque point de la portion du contour qu'elle contient

$$V+P(p'-p)+Q(q'-q)=0,$$

ou

$$pp' + qq' = 0;$$

et l'on en conclura sans peine que si, par un point quelconque du contour, on mène deux plans verticaux, l'un normal à la surface cherchée, l'autre normal à la surface limite, ces deux plans seront perpendiculaires entre eux.

Problème XXII.

165. *Trouver la surface pour laquelle l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(z - px - qy)\,dy\,dx$$

soit un maximum ou un minimum, en même temps que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{p^2+q^2}\,.\,dy\,dx$$

conserve une valeur donnée.

Ce problème se ramène à la recherche du maximum ou minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(z - px - qy + n\sqrt{p^2+q^2}\right)dy\,dx,$$

dans laquelle n est une quantité constante, mais inconnue.

On a

$$V = z - px - qy + n\sqrt{p^2+q^2},$$

$$N = 1,\quad P = -x + \frac{np}{\sqrt{p^2+q^2}}\quad Q = -y + \frac{nq}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

et l'équation indéfinie

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = \frac{3}{n}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}},$$

intégrée par la méthode de Monge, donne

$$(1) \qquad [x + \varphi(z)]^2 + [y + \psi(z)]^2 = \frac{n^2}{9},$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires. La surface représentée par cette équation est évidemment une surface annulaire ou tore engendré par un cercle de rayon $\frac{n}{3}$ qui se meut dans l'espace suivant une loi quelconque, en restant toujours parallèle au plan xy. Si l'on nomme ξ, η, ζ, les coordonnées variables de son centre, on aura

$$\xi = -\varphi(z), \quad \eta = -\psi(z), \quad \zeta = z,$$

et ces équations, lorsqu'on aura déterminé les deux fonctions arbitraires, représenteront la courbe directrice que le centre décrira dans son mouvement. Les valeurs des dérivées partielles du premier ordre p et q seront d'ailleurs

$$p = -\frac{x + \varphi(z)}{[x + \varphi(z)]\varphi'(z) + [y + \psi(z)]\psi'(z)},$$

$$q = -\frac{y + \psi(z)}{[x + \varphi(z)]\varphi'(z) + [y + \psi(z)]\psi'(z)}.$$

166. Parmi les diverses hypothèses qu'on peut faire relativement aux limites, nous n'examinerons que celle où la surface (1) doit se terminer dans deux ou plusieurs surfaces données. Soient p', q' les dérivées de z relatives à chacune de ces surfaces terminales, la portion du contour qu'elle doit contenir sera caractérisée par l'équation

$$V + P(p' - p) + Q(q' - q) = 0,$$

ou bien par

$$(2) \qquad z - p'x - q'y + \frac{n(pp' + qq')}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0.$$

Supposons, par exemple, que l'une des surfaces limites soit un plan ayant pour équation

$$z = ax + by,$$

on aura

$$p' = a, \quad q' = b,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$ap + bq = 0.$$

Remplaçant p et q par les valeurs trouvées ci-dessus, il vient

$$(3) \qquad z + a\varphi(z) + b\psi(z) = 0;$$

et, en éliminant $\varphi(z)$, $\psi(z)$ à l'aide des équations

$$\xi = -\varphi(z), \quad \eta = -\psi(z), \quad \zeta = z,$$

qui donnent les coordonnées du centre du cercle générateur,

$$\zeta = a\xi + b\eta.$$

Sous cette forme on voit que le centre du cercle générateur doit se trouver constamment dans le plan limite. Si la surface cherchée devait se terminer de l'autre côté sur un second plan dont l'équation fût

$$z = a'x + b'y,$$

on trouverait également pour l'intersection correspondante

$$(4) \qquad z + a'\varphi(z) + b'\psi(z) = 0$$

et

$$\zeta = a'\xi + b'\eta,$$

d'où l'on conclut que le centre du cercle générateur doit se trouver aussi dans ce second plan, en sorte qu'il se mouvra le long de l'intersection des deux plans limites;

la surface cherchée sera donc un cylindre oblique à base circulaire, ayant pour axe l'intersection des deux plans.

Les fonctions arbitraires φ et ψ seront dans ce cas déterminées par les deux équations (3) et (4), qui donnent

$$\varphi(z) = \frac{b - b'}{ab' - a'b} z, \quad \psi(z) = - \frac{a - a'}{ab' - a'b} z,$$

et la fonction z est alors parfaitement connue, sauf la constante n, dont on disposera pour faire prendre à l'intégrale $\int\int \sqrt{p^2 + q^2} \,.\, dy\, dx$ la valeur constante qu'elle doit garder. Il serait impossible d'assujettir la fonction z à aucune nouvelle condition relative aux limites de x ; si donc les autres conditions, qu'on peut se donner relativement aux limites, ne sont pas satisfaites d'elles-mêmes, le problème deviendra impossible, et il n'y aura ni maximum ni minimum.

Problème XXIII.

167. *Trouver la surface dont l'aire entre des limites données soit la plus petite possible.*

La différentielle de l'aire étant $\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy\, dx$, l'intégrale qu'il faut rendre minimum sera

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dy\, dx.$$

On a

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$N = 0, \quad P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'équation indéfinie du problème et qui doit déterminer la forme générale de la surface cherchée, sera donc

$$(1) \qquad \frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0;$$

or elle exprime la propriété bien connue, qu'*en chaque point de la surface minimum la somme des deux courbures principales est nulle,* ou, en d'autres termes, que *les deux rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraire.*

Lorsque le contour de la surface dans l'espace sera donné, les fonctions arbitraires amenées par l'intégration de l'équation (1) seront déterminées par cette seule condition, et il n'y aura plus d'équations aux limites. Mais si l'on assigne seulement les valeurs limites de x et de y, sans assigner les valeurs correspondantes de z, ou si l'on ne donne du contour que sa projection sur le plan xy, on devra avoir le long de cette projection

$$Q\,dx - P\,dy = 0 \quad \text{ou} \quad q\,dx - p\,dy = 0,$$

et cette équation exprime que la surface minimum rencontre sous un angle droit la surface ou les surfaces cylindriques qui projettent le contour sur le plan xy. Le plan qui a pour équation $z = c$, satisfait à la fois évidemment et à cette condition et à l'équation générale (2). Il est donc la solution la plus simple du problème dans le cas dont il s'agit; mais le difficile serait de démontrer qu'il est la seule solution possible.

Supposons maintenant que la surface minimum, au lieu d'être limitée par certaines courbes ou par certaines parois cylindriques, soit assujettie à se terminer dans deux ou plusieurs surfaces données mais quelconques; on aura alors en chaque point du contour entier

$$V + P(p' - p) + Q(q' - q) = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + pp' + qq' = 0,$$

équation qui prouve que la surface minimum rencontrera sous un angle droit chacune des surfaces limites.

168. L'intégrale générale de l'équation (1), qui repré-

sente toutes les surfaces minima, a été obtenue, pour la première fois, par Monge, mais sous une forme toute compliquée d'imaginaires qui la rendait peu propre aux applications. Legendre, et plus tard MM. Serret et Catalan, se sont occupés à leur tour de cette même intégrale, soit pour vérifier le résultat de Monge, soit pour le simplifier. Enfin, M. Ossian Bonnet, en développant les principes sur lesquels Gauss fonda ses belles recherches relatives à la théorie des surfaces, a montré que ces mêmes principes conduisent facilement à une forme simple de l'intégrale dont il s'agit. Nous indiquerons en peu de mots la marche suivie par M. Bonnet, dans son excellent Mémoire *sur l'emploi d'un nouveau système de variables* (*Journal de Liouville*, t. V, 1860), pour obtenir sous forme finie l'équation de la surface minima.

Soient α, β, γ les angles de la normale à la surface avec les axes des coordonnées, ξ l'angle avec le plan xz du plan mené par la normale parallèlement à l'axe des z, et posons $\eta = l \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}$, en sorte que $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = e^{\eta}$; ξ et η sont les nouvelles coordonnées ou variables indépendantes qu'il s'agit de substituer à x, y. En désignant par i l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, on aura

$$\sin\gamma = \frac{1}{\cos i\eta}, \quad \cos\gamma = i \operatorname{tang} i\eta,$$

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\xi = \frac{\cos\xi}{\cos i\eta},$$

$$\cos\beta = \sin\gamma\sin\xi = \frac{\sin\xi}{\cos i\eta},$$

et l'équation aux dérivées partielles (1) prendra la forme

$$\frac{d\cdot\dfrac{\cos\xi}{\cos i\eta}}{dx} + \frac{d\cdot\dfrac{\sin\xi}{\cos i\eta}}{dy} = 0,$$

ou

$$(3)\quad -\sin\xi\frac{d\xi}{dx}+\cos\xi\frac{d\xi}{dy}+i\,\mathrm{tang}\,i\eta\left(\cos\xi\frac{d\eta}{dx}+\sin\xi\frac{d\eta}{dy}\right)=0.$$

Pour déterminer les dérivées partielles $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dy}$, cherchons d'abord les relations générales entre ξ, η et x, y. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du plan tangent et D la distance de l'origine à ce plan, nous aurons

$$\mathrm{x}\cos\alpha+\mathrm{y}\cos\beta+\mathrm{z}\cos\gamma=\mathrm{D},$$

ou, en substituant les valeurs des cosinus de α, β, γ, et multipliant par $\cos i\eta$,

$$(4)\qquad \mathrm{x}\cos\xi+\mathrm{y}\sin\xi+\mathrm{z}\,i\sin i\eta=\mathrm{D}\cos i\eta.$$

Cette équation, dans laquelle on peut considérer le second membre comme une fonction de ξ, η, définit tous les plans tangents à la surface. Pour en déduire les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette surface, nous ferons remarquer que ce point peut être regardé comme l'intersection de trois plans tangents infiniment voisins, et nous en conclurons que x, y, z, substitués respectivement à x, y, z, doivent vérifier l'équation (4) et cette équation différentiée soit par rapport à ξ, soit par rapport à η, en laissant x, y, z constants. Donc, en faisant, pour abréger, $\zeta=-\mathrm{D}\cos i\eta$, on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x\cos\xi+y\sin\xi+z\,i\sin i\eta &= -\zeta,\\ x\sin\xi-y\cos\xi &= \frac{d\zeta}{d\xi},\\ z\cos i\eta &= \frac{d\zeta}{d\eta}.\end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations qui déterminent les coordonnées x, y, z, lorsque ξ, η, ζ sont connus. Si on les différentie en faisant varier à la fois $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, et qu'on

fasse, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} u = \zeta + i \operatorname{tang} i\eta \dfrac{d\zeta}{d\eta} + \dfrac{d^2\zeta}{d\xi^2}, \\ v = \dfrac{d^2\zeta}{d\xi\, d\eta}, \\ w = i \operatorname{tang} i\eta \dfrac{d\zeta}{d\eta} + \dfrac{d^2\zeta}{d\eta^2}, \end{cases}$$

on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(7)\quad \begin{cases} dx \cos\xi + dy \sin\xi = - i \operatorname{tang} i\eta\,(v d\xi + w d\eta), \\ dx \sin\xi - dy \cos\xi = u d\xi + v d\eta, \\ dz \cos i\eta = v d\xi + w d\eta. \end{cases}$$

En faisant tour à tour $dy = 0$, $dx = 0$, on déduit de ces équations les valeurs des dérivées partielles $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, et ces valeurs substituées dans l'équation (3) lui font prendre la forme très-simple

$$(8)\qquad u + w = 0.$$

Or, si l'on regarde ξ, η, à leur tour, comme des variables indépendantes, la troisième des équations (7) donne

$$v = \frac{dz}{d\xi} \cos i\eta,$$

$$w = \frac{dz}{d\eta} \cos i\eta;$$

on trouve d'ailleurs par les équations (6)

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\eta} &= i \operatorname{tang} i\eta \left(i \operatorname{tang} i\eta \frac{d\zeta}{d\eta} + \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} \right) + \frac{d^3\zeta}{d\xi^2 d\eta} \\ &= \frac{dv}{d\xi} + w i \operatorname{tang} i\eta \\ &= \frac{d^2 z}{d\xi^2} \cos i\eta + \frac{dz}{d\eta}\, i \sin i\eta; \end{aligned}$$

on aura donc, en différentiant par rapport à η l'équation $u + w = 0$,

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{d^2 z}{d\eta^2} = 0,$$

équation bien connue, dont l'intégrale générale est

(9) $$z = \varphi(\xi + i\eta) + \psi(\xi - i\eta),$$

φ et ψ étant des fonctions réelles ou imaginaires. Toutefois il faut observer que cette intégrale est plus générale que l'équation proposée (1) ou (8), et qu'en déduisant de z la valeur de ζ au moyen de la relation

$$\zeta = \int z \cos i\eta \, d\eta,$$

on devra déterminer la fonction arbitraire de ξ, introduite par l'intégration, de manière à satisfaire à la condition $u + w = 0$.

Supposons, par exemple,

$$\varphi(\xi + i\eta) = \frac{1}{2}(a - ib)(\xi + i\eta), \quad \psi(\xi - i\eta) = \frac{1}{2}(a + ib)(\xi - i\eta),$$

a, b étant des constantes réelles et positives, nous aurons successivement

$$z = a\xi + b\eta,$$
$$\zeta = \int z \cos i\eta \, d\eta = \int (a\xi + b\eta) \cos i\eta \, d\eta$$
$$= -(a\xi + b\eta) i \sin i\eta - b \cos i\eta + X,$$

X étant une fonction arbitraire de ξ dont X' et X'' seront les dérivées par rapport à ξ du premier et du second ordre;

$$u = -b \cos i\eta + X'' + X, \quad w = b \cos i\eta,$$
$$u + w = X'' + X = 0,$$

et en intégrant,

$$X = C \cos \xi + C' \sin \xi.$$

Faisons, pour simplifier, $C = 0$, $C' = 0$, il viendra $X = 0$,

$$\zeta = -(a\xi + b\eta)\, i \sin i\eta - b \cos i\eta;$$

et les équations (5) donneront

$$(10) \quad \begin{cases} x = b \cos i\eta \cos \xi - ai \sin i\eta \sin \xi, \\ y = b \cos i\eta \sin \xi + ai \sin i\eta \cos \xi, \\ z = a\xi + b\eta, \end{cases}$$

ou bien, en coordonnées polaires, si l'on fait $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$,

$$(11) \quad \begin{cases} r \cos(\omega - \xi) = b \cos i\eta, \\ r \sin(\omega - \xi) = ai \sin i\eta, \\ z = a\xi + b\eta. \end{cases}$$

Les équations (10) et (11), en supposant qu'on ait éliminé ξ, η, représentent une espèce particulière de surfaces minima. Dans le cas particulier où $a = 0$, elles donnent

$$r = b \cos \frac{iz}{b} = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{z}{b}} + e^{-\frac{z}{b}}\right),$$

équation de la surface de révolution engendrée par une chaînette.

Si $b = 0$, on a

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{z}{a},$$

équation de l'héliçoïde gauche à plan directeur.

Dans le cas général, où a et b sont quelconques, l'élimination de ξ, η donne

$$z - a\omega = a \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{r^2 + a^2}} + bl \frac{\sqrt{r^2 + a^2} + \sqrt{r^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

équation qui représente évidemment une surface engen-

drée par le mouvement héliçoïdal autour de l'axe des z, d'une certaine courbe plane dont on trouve l'équation en faisant dans celle qui précède $\omega = 0$, $r = x$.

169. Il existe un moyen très-simple de réaliser une multitude de surfaces à aire minima, c'est-à-dire à courbure moyenne nulle, ou, plus généralement, à courbure moyenne constante. M. Plateau a fait voir, en effet, que cette propriété d'avoir sa courbure moyenne nulle ou constante est la condition d'équilibre d'une lame liquide très-mince, d'une bulle de savon par exemple, dont la masse est sensiblement nulle, et que l'on peut considérer pour cette raison comme soustraite à l'action de la pesanteur, comme soumise à la seule action des forces moléculaires : si cette lame est fermée de toute part de manière à emprisonner une certaine quantité d'air, la courbure moyenne est constante, et plus ou moins grande selon la différence des pressions intérieure et extérieure ; si, au contraire, la lame est en contact, par ses deux faces, avec l'air libre, la courbure moyenne est nulle.

En se servant, pour faire naître ces bulles ou lames, d'une solution de savon et de glycérine mélangés, M. Plateau a su leur donner une persistance extraordinaire. On peut alors étudier tout à l'aise les formes très-diverses, très-originales, suivant lesquelles les lames liquides s'arrondissent ou s'étalent, lorsqu'on les assujettit à adhérer aux contours de charpentes rigides dessinées à l'aide de fils de fer légèrement oxydés par l'acide nitrique, et qu'on plonge un instant, pour les retirer presque sur-le-champ, dans le mélange glycérique. L'illustre physicien a ainsi créé un procédé facile et charmant de résoudre expérimentalement le problème de la moindre surface passant par un contour donné.

Veut-on, par exemple, la surface engendrée par la ré-

volution d'une chaînette autour de sa directrice, surface à laquelle M. Plateau a donné le nom de *caténoïde*, on introduit, au moyen d'un pinceau imbibé de solution glycérique, une petite quantité de liquide entre deux anneaux circulaires presque en contact; on soulève doucement l'anneau supérieur, et l'on voit un caténoïde laminaire arrondir sa surface entre les deux anneaux. En continuant à faire monter graduellement l'anneau, on voit le caténoïde se resserrer, s'étrangler en son milieu, et bientôt se rompre pour se convertir en deux lames planes s'étendant sur les deux anneaux. Cette rupture a lieu lorsque la distance des deux anneaux est à peu près égale aux deux tiers de leur diamètre, exactement comme l'exige la théorie. Il résulte, en effet, de notre discussion du problème de la moindre surface de révolution (n° 103), que la chaînette génératrice devient impossible lorsque le rapport entre la distance et le diamètre des deux bases, supposées égales, dépasse $\cot(56^{\circ}28')$ ou 0,6627. Nous avons vu, en outre, qu'aussi longtemps que cette limite n'est pas atteinte, il existe deux chaînettes ayant l'axe de révolution pour directrice, mais que c'est l'extérieure ou la moins rentrée qui seule donne le minimum. Or ce résultat, que nous croyons avoir tiré le premier du calcul des variations, est encore parfaitement d'accord avec l'expérience; car M. Plateau avait déjà observé que des deux caténoïdes possibles, qu'il a le premier signalés, c'est toujours le moins rentré qui se produit, et il en avait conclu que le caténoïde intérieur ou plus rentré est instable.

Problème XXIV.

170. *Quelle forme doit avoir une surface d'étendue ou d'aire donnée pour que son centre de gravité se trouve le plus bas possible?*

Si l'on suppose que l'axe des z coïncide avec la direc-

tion de la pesanteur, l'aire U de la surface sera

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} . dy\, dx,$$

et l'ordonnée verticale de son centre de gravité

$$Z = \frac{1}{U} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \sqrt{1 + p^2 + q^2} . dy\, dx.$$

La question consiste à trouver parmi toutes les formes de la fonction z pour lesquelles l'intégrale U prend une certaine valeur déterminée, celle qui donne pour Z, et par suite pour UZ, la plus grande valeur possible; ou à chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (z - a) \sqrt{1 + p^2 + q^2} . dy\, dx,$$

dans laquelle a est une nouvelle quantité constante mais inconnue, qu'il faut déterminer, de manière à faire prendre à l'intégrale U la valeur donnée qu'elle doit avoir.

On a

$$V = (z - a) \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$N = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad P = \frac{(z-a)p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Q = \frac{(z-a)q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

et la forme générale de la surface cherchée sera déterminée par l'équation indéfinie

$$(1) \quad 1 + p^2 + q^2 = (z - a) \left\{ (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t \right\}.$$

Cette équation exprime une relation remarquable entre les rayons de courbure principaux R, R′, de la surface. En effet, si l'on regarde chaque rayon comme

positif, lorsqu'il est dirigé en bas, c'est-à-dire lorsqu'à partir de la surface sa direction forme un angle aigu avec le demi-axe des z positifs, et négatif lorsqu'il est dirigé en haut, on aura

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$$

et l'équation (1), devenue

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{(z-a)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

exprimera que *le rayon de la courbure moyenne est le double de la normale prolongée jusqu'à un certain plan horizontal dont l'équation est* $z=a$.

171. Lorsque le contour entier de la surface est donné, la condition de maximum ne fournit aucune équation aux limites. Mais si l'on connaît seulement la projection du contour sur le plan xy, ou les valeurs limites de y et de x sans celles de z, on devra avoir en chaque point du contour

$$Q\,dx-P\,dy=0 \quad \text{ou} \quad q\,dx-p\,dy=0;$$

équation qui exprime que la surface est partout normale aux cylindres ou aux plans qui la limitent dans le sens des x et des y.

Plus généralement, si le contour devait se terminer sur deux ou sur plusieurs surfaces données, de forme quelconque, on aurait, en représentant par p', q' les dérivées partielles de z relatives à l'une ou l'autre de ces surfaces terminales, la condition

$$V+P(p'-p)+Q(q'-q)=0,$$

ou

$$1 + pp' + qq' = 0,$$

c'est-à-dire qu'en chaque point du contour, la surface cherchée devrait couper les surfaces limites sous un angle droit.

172. La surface dont le centre de gravité est le plus bas, a beaucoup d'analogie avec la chaînette, qui parmi les courbes jouit de la même propriété. Pour rendre cette analogie plus frappante encore, supposons que la surface représentée par l'équation (1) soit un cylindre ayant sa génératrice parallèle à l'axe des y, et cherchons quelle doit être alors sa forme. On aura dans ce cas $q = 0$, $s = 0$, $t = 0$, et l'un des rayons de courbure principaux sera infini, tandis que l'autre se réduira,

$$R = (z - a)\sqrt{1 + p^2}.$$

Dans cette équation, qui détermine la forme de la section normale à l'axe des y, on reconnaît sans peine l'équation de la chaînette. Mais il faut se garder d'en conclure que la surface ainsi déterminée soit parmi toutes les surfaces cylindriques celle dont le centre de gravité est le plus bas; elle ne le serait en effet que dans le cas où la longueur de la génératrice ou la différence $y_2 - y_1$ resterait constante. Dès que la différence $y_2 - y_1$ redevient variable, la courbe directrice du cylindre cesse d'être une chaînette. Pour trouver, en effet, la surface cylindrique dont le centre de gravité est le plus bas, il aurait fallu dès le départ faire entrer en ligne de compte la condition $q = 0$, ce qui aurait modifié sensiblement l'équation générale (1). Au reste, cette dernière question est celle que nous avons traitée, Problème XI, en cherchant la forme d'équilibre d'un fil dont la densité ou l'épaisseur est variable.

Problème XXV.

173. *Un certain volume de matière homogène est terminé en haut par un plan horizontal, en bas par une surface courbe d'étendue ou d'aire donnée, quelle doit être la forme de cette surface pour que le centre de gravité du volume soit le plus bas possible ?*

Si l'on prend le plan horizontal donné pour plan des xy et la direction de la pesanteur pour axe des z, le problème revient à chercher le maximum de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(z^2+2cz-2a\sqrt{1+p^2+q^2}\right)dydx,$$

a, c étant deux constantes, qui permettront d'assigner à l'aire de la surface courbe et au volume les valeurs déterminées qu'ils doivent avoir.

On a

$$V=z^2+2cz-2a\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$N=2(z+c),\quad P=\frac{-2ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Q=\frac{-2aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

et la condition générale de maximum, $N-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}=0$, devient

$$\frac{z+c}{a}+\frac{d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx}+\frac{d\cdot\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}=0,$$

ou, en développant, et désignant par R, R′ les deux rayons de courbure principaux,

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{z+c}{a}.$$

Telle est l'équation de la surface cherchée. Elle exprime

qu'*en chaque point de la surface la courbure moyenne est en raison inverse de la distance à un certain plan horizontal dont l'équation est* $z + c = 0$.

La surface devant aboutir sur tout son contour au plan xy, les valeurs limites de z sont nulles; si celles de x, y ne sont pas fixées, ou si le contour de la surface dans le plan xy n'est pas assigné à l'avance, les équations aux limites se réduisent (nº 67) à la condition unique

$$V - Pp - Qq = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

qui doit subsister en chaque point du contour, et qui exprime que la surface courbe est normale au plan xy le long de leur intersection commune.

Problème XXVI.

174. *Parmi toutes les surfaces recouvrant le même volume et ayant les mêmes limites, trouver celle dont l'aire est minimum.*

Les conditions du problème étant

$$\iint z\,dy\,dx = \text{const.}, \quad \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}.\,dy\,dx = \text{min.},$$

la question revient à chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(a\sqrt{1 + p^2 + q^2} - z\right) dy\,dx,$$

a étant un facteur constant, mais indéterminé. Dans les notations adoptées, on a

$$V = a\sqrt{1 + p^2 + q^2} - z,$$

$$N = -1, \quad P = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Q = \frac{aq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

et la forme générale de la surface cherchée sera caractérisée par l'équation indéfinie

$$(1)\quad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{1}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Soient toujours R et R′ les rayons de courbure principaux, que nous supposerons cette fois positifs lorsqu'ils seront dirigés en bas, c'est-à-dire lorsque la surface tournera sa concavité vers les z négatifs; négatifs, quand la concavité sera dirigée en haut. L'équation indéfinie devient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{a},$$

et elle exprime que la surface qui sous la moindre aire possible renferme un volume donné, jouit de cette propriété remarquable d'avoir en chaque point la même *courbure moyenne*.

475. Un mot sur les équations aux limites dans les hypothèses les plus simples. Si l'on connaît seulement la projection du contour de la surface sur le plan xy, ou les surfaces cylindriques perpendiculaires au plan xy, entre lesquelles elle reste comprise, on devra avoir en chaque point du contour

$$Q\,dx - P\,dy = 0, \quad \text{ou} \quad q\,dx - p\,dy = 0,$$

équation qui exprime que la surface cherchée rencontre sous un angle droit toutes les faces du cylindre limite.

Plus généralement, si la surface cherchée doit se terminer sur une surface quelconque dont l'équation aux dérivées partielles soit $dz = p'\,dx + q'\,dy$, on devra avoir, le long du contour,

$$V + P(p'-p) + Q(q'-q) = 0,$$

ou

$$z\sqrt{1+p^2+q^2} - a(1+pp'+qq') = 0;$$

et cette équation exprime la propriété suivante :

Si par le pied de l'ordonnée z d'un point quelconque du contour on fait passer un plan parallèle au plan tangent à la surface limite, et que par le même point du contour on mène une normale à la surface cherchée, cette normale, prolongée jusqu'à la rencontre du plan parallèle, sera constante et égale à a.

Dans le cas particulier où la surface doit se terminer dans un plan horizontal, représenté par l'équation $z = h$, on a $p' = 0$, $q' = 0$, et la formule précédente se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{h}{a},$$

d'où l'on conclut facilement que la surface demandée coupe le plan limite sous un angle constant.

Le cosinus de cet angle est $\frac{h}{a}$; il sera nul lorsque le plan horizontal se confondra avec le plan xy. Donc la surface qui avec un plan donné renferme un certain volume sous la plus petite aire possible doit être normale au plan en chaque point de l'intersection commune. Une demi-sphère de rayon convenablement choisi remplira évidemment cette condition, en même temps qu'elle satisfera à l'équation indéfinie (1); c'est donc une solution du problème, mais il faudrait pouvoir prouver en outre que c'est la seule.

176. Considérons encore le cas où le contour est indéterminé, ainsi que sa projection sur le plan xy, mais où l'on se donne l'aire circonscrite par cette projection. Aux

conditions premières il faudra joindre les suivantes :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} dy\,dx = \text{const.},$$

et chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} (\mathrm{V}+c)\,dy\,dx,$$

V ayant la même signification qu'auparavant. On obtiendra la même équation générale ou indéfinie (1); mais les équations aux limites deviendront

$$\mathrm{V}+c=0;\quad \mathrm{Q}\,dx-\mathrm{P}\,dy=0,$$

pour $y=y_1$, $y=y_2$, et

$$\int_{y_1}^{y_2}(\mathrm{V}+c)\,dy=0,\quad \mathrm{P}=0,$$

pour $x=x_1$, $x=x_2$.

Les deux premières donnent

$$\frac{z-c}{a}=\sqrt{1+p^2+q^2},\quad q\,dx-p\,dy=0;$$

on a d'ailleurs

$$dz=p\,dx+p\,dy;$$

donc

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{p^2+q^2}=\frac{ds}{\sqrt{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)}},$$

et par suite

$$1+p^2+q^2=\frac{ds^2}{ds^2-dz^2}=\frac{(z-c)^2}{a^2}$$

ou bien

$$ds=\frac{(z-c)\,dz}{\sqrt{(z-c)^2-a^2}};$$

et, en intégrant,

$$s^2 = (z - c)^2 - a^2,$$

l'arc s étant compté à partir du point pour lequel $z = a + c$. Donc si l'on développe le cylindre limite sur un plan, le contour rabattu formera une chaînette dont le paramètre sera égal à a. L'équation

$$qdy - pdx = 0$$

prouve d'ailleurs que la surface cherchée rencontre les cylindres limites sous un angle droit.

Il paraît difficile de tirer rigoureusement des équations indéfinies ou aux limites d'autres conséquences que celles que nous venons d'énumérer. Mais on voit immédiatement que, dans le cas dont il s'agit, le plan horizontal déterminé par l'équation

$$z = a + c$$

satisfait à toutes les conditions aux limites aussi bien qu'à l'équation générale (1), et l'on est ainsi conduit à conclure que la moindre surface qui puisse recouvrir un cylindre de volume et de base donnés, est un plan parallèle à la base. La forme de la base reste encore indéterminée, et elle doit l'être évidemment, puisqu'un changement quelconque apporté à son périmètre, sans altération de son étendue superficielle, ne changerait en rien ni l'aire de la base supérieure, ni le volume du cylindre.

Pour le plan en question, la courbure moyenne est nulle, et par conséquent $a = \infty$; mais on peut remarquer que la somme $a + c$ tient place d'une nouvelle constante dont la valeur est finie et qui devra être choisie de manière à assurer au volume circonscrit la valeur assignée.

QUATORZIÈME LEÇON.

Applications à des intégrales triples. — Surface à aire donnée renfermant le plus grand volume. — Minimum de l'intégrale $\int\int\int\sqrt{1+p^2+q^2+r^2}\,dz\,dy\,dx$, p, q, r, étant les dérivées partielles d'une fonction indéterminée u.

---

177. Dans les deux problèmes suivants, dont le premier est au fond identique avec celui que nous venons de résoudre, nous ferons avec M. Sarrus l'application du calcul des variations à la recherche des maxima et minima des intégrales triples.

Problème XXVII.

Quelle peut être la surface qui, sous une étendue superficielle donnée, renferme le plus grand volume?

Le volume a pour expression

$$U = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dz\,dy\,dx.$$

Il est limité par six faces que nous désignons de la manière suivante :

1° Deux faces planes A_1 et A_2, correspondantes aux deux limites x_1 et x_2 de la variable x;

2° Deux faces cylindriques B_1 et B_2, correspondantes aux deux limites y_1 et y_2 de la variable y;

3° Deux faces courbes C_1 et C_2, correspondantes aux deux limites z_1 et z_2 de la variable z.

Ces diverses faces ont pour expression

$$\mathrm{C}_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1} \sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,dy\,dx,$$

$$\mathrm{B}_1 = \int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+y'^2}\,.\,dz\,dx,$$

$$\mathrm{A}_1 = \Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dz\,dy,$$

$$\mathrm{C}_2 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2} \sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,dy\,dx,$$

$$\mathrm{B}_2 = \int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+y'^2}\,.\,dz\,dx$$

$$\mathrm{A}_2 = \Big|^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dz\,dy,$$

à la condition que p, q, y' indiqueront les dérivées de z_1 et de y_1, ou celles de z_2 et de y_2 suivant le signe de substitution dont ils seront affectés, c'est-à-dire suivant qu'il s'agira des faces C_1, B_1, ou des faces C_2, B_2.

Comme l'étendue totale de la surface doit rester invariable, tandis qu'on cherche le maximum du volume, le problème revient à trouver le maximum absolu de l'expression définie

$$\mathrm{S} = \mathrm{U} - a(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2).$$

Or, on trouve, d'après les règles données précédemment,

$$\delta\mathrm{A}_1 = \Big|^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}(\delta z + p\,\delta x)\,dy + \Big|^{x_1}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}(\delta y + y'\,\delta x)\,dz,$$

$$\delta\mathrm{A}_2 = \Big|^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}(\delta z + p\,\delta x)\,dy + \Big|^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}(\delta y + y'\,\delta x)\,dz,$$

$$\delta B_1 = -\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y \,.\, dzdy$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\Big|_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{1+y'^2}\,\delta z+\frac{q-py'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right\}dx$$

$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_1}\int_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{1+y'^2}\,\delta x+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right\}dz,$$

$$\delta B_2 = -\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y \,.\, dzdx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{1+y'^2}\,\delta z+\frac{q-py'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right\}dx$$

$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\Big|^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{1+y'^2}\,\delta x+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right\}dz,$$

$$\delta C_1 = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\left(\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\delta z \,.\, dydx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\left\{\frac{q-py'}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z+\sqrt{1+p^2+q^2}\,\delta y\right\}dx$$

$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_1}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z+\sqrt{1+p^2+q^2}\,\delta x\right\}dy,$$

$$\delta C_2 = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2}\left(\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\delta z \,.\, dydx$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2}\left(\frac{q-py'}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z+\sqrt{1+p^2+q^2}\,\delta y\right)dx$$

$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|^{z_2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z+\sqrt{1+p^2+q^2}\,\delta x\right)dy,$$

$$dU = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \delta z . dydx + \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \delta y . dzdx$$
$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \delta x . dzdy ;$$

et la variation complète de S peut s'écrire, pour abréger, de la manière suivante :

$$\delta S =$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \left\{ 1 \pm \left(\frac{d}{dx} \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \right\} \delta z . dydx$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \left\{ 1 \pm \frac{d}{dx} \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} \right\} \delta y . dzdx$$
$$+\Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \delta x . dzdy$$
$$\mp a \int_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \left\{ \left(\sqrt{1+y'^2} \pm \frac{q-py'}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \delta z + \left(\frac{q-py'}{\sqrt{1+y'^2}} \pm \sqrt{1+p^2+q^2} \right) \delta y \right\} dx$$
$$\mp a \Big|_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\Big|_{z_1}^{z_2} \left\{ \left(1 \pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \delta z + \left(p \pm \sqrt{1+p^2+q^2} \right) \delta x \right\} dy$$
$$\mp a \Big|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \left\{ \left(1 \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \delta y + \left(y' \pm \sqrt{1+y'^2} \right) \delta x \right\} dz.$$

Si l'on décomposait toutes les substitutions doubles en substitutions simples correspondantes, on aurait dix-huit termes au lieu de six que contient cette équation. Quant aux signes $\pm$ et $\mp$ dont nous avons fait usage, afin de resserrer la formule dans le moindre espace possible, il importe peu, pour les conclusions que nous allons en tirer, que l'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur; il est utile cependant d'indiquer quel

signe il faut prendre. Dans les trois premiers termes, qui n'ont chacun qu'un seul signe de substitution, le signe + se combine avec la limite supérieure, et le signe — avec la limite inférieure de la variable à laquelle se rapporte la substitution. Dans les trois derniers termes, renfermant chacun deux signes de substitution, on prendra : 1° *sous le signe intégral*, le signe +, lorsque les substitutions se rapporteront toutes deux aux limites supérieures ou toutes deux aux limites inférieures des variables, c'est-à-dire aux combinaisons $y_1 z_1$, $y_2 z_2$, $x_1 z_1$, $x_2 z_2$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$; le signe —, lorsque les substitutions se rapporteront l'une à une limite supérieure, l'autre à une limite inférieure, ou aux combinaisons $y_1 z_2$, $y_2 z_1$, $x_1 z_2$, $x_2 z_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$; 2° *en dehors du signe intégral*, le signe — ou le signe +, suivant que la première des substitutions, en lisant de gauche à droite, se rapporte à la limite supérieure ou à la limite inférieure de la variable qu'elle concerne.

Cette formule est identique au fond avec celle donnée par M. Sarrus, mais la simplification apportée aux notations nous a permis de réunir en six termes la variation δS, qui se compose chez M. Sarrus de trente expressions définies. La forme abrégée a en outre l'avantage de représenter par une seule expression tous les termes de même nature, dont la discussion se ferait de la même manière et donnerait lieu à des conséquences analogues.

178. Arrivons aux diverses conclusions que l'on peut tirer de l'équation $\delta S = 0$, lorsque les limites sont entièrement indéterminées ou n'ont été l'objet d'aucune restriction.

On remarque d'abord que chaque terme qui contient en facteur la variation δz, laquelle représente soit δz_1, sait δz_2, selon le signe de substitution qui précède, four-

nit une équation distincte qui doit avoir lieu dans toute l'étendue de ce terme, à moins que cette étendue ne soit elle-même nulle. Ainsi le premier terme fournit l'équation indéfinie

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\mp 1,$$

qui se partage en deux autres,

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-\frac{1}{a},$$

relatives, la première à la surface supérieure C_2, et la seconde à la surface inférieure C_1. Ces deux surfaces jouissent donc de la propriété commune d'avoir en chaque point la même courbure moyenne; elles tournent seulement leur convexité en sens contraires.

Égalé à zéro, le coefficient de δz dans le quatrième terme donne

$$(2)\qquad \frac{q-py'}{\sqrt{1+p^2+q^2}.\sqrt{1+y'^2}}=\pm 1,$$

le signe + se rapportant aux arêtes B_1C_2 et B_2C_1, le signe — aux arêtes B_1C_1, B_2C_2. Or le premier membre est évidemment le cosinus de l'angle sous lequel les faces B et C se rencontrent le long de l'arête que l'on considère; donc, puisque ce cosinus est égal à l'unité, chacune des faces C_1, C_2 se raccorde avec les faces cylindriques B_1, B_2, ou leur est tangente. En outre, l'équation (2) fait disparaître ou rend nul identiquement le coefficient de δy dans le quatrième terme.

Le cinquième terme fournit l'équation

$$(3)\qquad \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\pm 1,$$

qui appartient avec le signe + aux arêtes A_1C_2, A_2C_1,

avec le signe — aux arêtes A_1C_1, A_2C_2. Elle exprime que les faces C_1 et C_2 sont normales à l'axe de x le long des arêtes d'intersection, et que, par conséquent, ces faces se raccordent également avec les faces planes A_1 et A_2, ou leur sont tangentes. Ajoutons que l'équation (3) fait disparaître identiquement le coefficient de δx dans le cinquième terme.

La variation δy, qui tient la place de δy_1 ou de δy_2, suivant la substitution qui l'affecte, ne dépendant plus que de la variable x, on la fera sortir des signes $\int$ et $|$ relatifs aux variables y et z, et l'on réunira tous les termes multipliés par δy, en deux groupes précédés l'un du signe intégral $\int_{x_1}^{x_2}$, l'autre du signe de substitution $\Big|_{x_1}^{x_2}$; on égalera ensuite à zéro le coefficient de δy dans chacun de ces groupes. Or puisque l'équation (2) a fait disparaître le coefficient de δy dans le quatrième terme, cette variation ne figure plus que dans le second et le sixième termes. Égalant à zéro le coefficient de δy dans le second terme, on aura aux deux limites de y

$$\int_{z_1}^{z_2}\left\{1 \pm \frac{d}{dx}\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\}dz = 0$$

et en intégrant,

$$(4)\qquad (z_2 - z_1)\left(1 \pm \frac{d}{dx}\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0,$$

équation qui se rapporte avec le signe + à la face B_2, avec le signe — à la face B_1.

Négligeant le second facteur, qui, égalé à zéro, donnerait un cylindre au rayon a, mais laisserait la valeur limite de z entièrement indéterminée, on devra avoir

$$z_2 - z_1 = 0, \quad z_2 = z_1$$

pour chacune des faces cylindriques B_1 et B_2; ces deux faces, par conséquent, se réduisent à zéro.

Cette relation en outre rend nul le champ du sixième terme qui disparaît ainsi sans donner lieu à aucune équation.

Reste enfin le troisième terme relatif aux faces planes A_1 et A_2 et qui donne pour chacune de ces faces

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dzdy = 0,$$

d'où il résulte que les faces planes A_1, A_2 sont également nulles. En résumé le solide maximum est enveloppé en tous sens par les deux surfaces C_1 et C_2, qui sont en réalité les deux nappes d'une même surface courbe, caractérisée par l'équation

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{1}{a^2};$$

d'ailleurs, les équations (2) et (3) font voir que les deux nappes sont perpendiculaires au plan xy, le long de leur arête commune, d'où l'on conclura que les deux nappes se raccordent et se fondent l'une dans l'autre le long du contour commun ou font réellement une seule surface fermée, donc la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$. La sphère au rayon $2a$ remplit cette condition, et l'on sait par d'autres considérations que la sphère est en effet la solution vraie et unique de notre problème. Mais pour arriver par le calcul des variations à exclure toute autre solution, il faudrait prouver que la sphère est la seule surface fermée dont la courbure moyenne reste constante; or cette démonstration est restée jusqu'ici au-dessus des forces de l'analyse.

Problème XXVIII.

179. *Quelle doit être la loi de la densité dans un corps dont la forme, la position et la masse sont connues, pour que, u exprimant la densité au point dont les coodonnées sont x, y, z, l'intégrale*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}\,.\,dz\,dy\,dx$$

soit un minimum? Il est d'ailleurs sous-entendu que cette intégrale est prise dans toute l'étendue du corps cherché.

La masse du corps ayant pour expression $\int\int\int u\,dz\,dy\,dx$, on doit chercher le minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}-\frac{u}{a}\right]dz\,dy\,dx,$$

le multiplicateur indéterminé étant représenté par $-\frac{1}{a}$.

En faisant, pour abréger,

$$p=\frac{du}{dx},\quad q=\frac{du}{dy},\quad r=\frac{du}{dz},\quad v=\sqrt{1+p^2+q^2+r^2},$$

et conservant d'ailleurs les notations du n° 74, on a

$$\mathrm{N}=-\frac{1}{a},\quad \mathrm{P}=\frac{p}{v},\quad \mathrm{Q}=\frac{q}{v},\quad \mathrm{R}=\frac{r}{v},$$

et l'on trouve l'équation indéfinie

$$(1)\qquad \frac{1}{a}+\frac{d.\frac{p}{v}}{dx}+\frac{d.\frac{q}{v}}{dy}+\frac{d.\frac{r}{v}}{dz}=0,$$

qui détermine la loi générale de la densité.

Si l'on appelle α, β, γ les angles compris entre la normale à la surface du corps et les axes des coordonnées, on aura en outre (n° 75) en chaque point de la surface

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = 0,$$

ou

$$p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma = 0, \tag{2}$$

et c'est la condition unique à laquelle se réduisent les équations aux limites, lorsque les limites de l'intégrale, ou les surfaces limites du corps, sont données.

Parmi les intégrales particulières de l'équation (1), on remarquera la suivante

$$(x - l)^2 + (y - m)^2 + (z - n)^2 + (u - k)^2 = 9a^2 \tag{3}$$

analogue aux équations du cercle et de la sphère. Pour qu'elle représentât la solution véritable du problème, il faudrait que la densité assignée à la limite du corps ou sur toute sa surface fût précisément celle que l'on déduirait de l'équation (3) résolue par rapport à u. C'est ce qui aurait lieu si le corps en question était une sphère dont la densité u fût constante et donnée en chaque point de la surface, et l'on en conclurait qu'en ce cas l'équation (3) représenterait la loi de densité pour laquelle l'intégrale proposée deviendrait minimum.

FIN DU CALCUL DES VARIATIONS.

